



UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI - UNIVATES

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

**TAREFAS INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DA GEOMETRIA NO
5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Joseane Marta Vian

Lajeado, outubro de 2020

Joseane Marta Vian

**TAREFAS INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DA GEOMETRIA NO
5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri

Lajeado, outubro de 2020

Joseane Marta Vian

TAREFAS INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO DA GEOMETRIA NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

A Banca Examinadora abaixo examinará a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, como parte da exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática:

Profa. Dra. Marli Teresinha Quartieri - Orientadora
Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES

Profa. Dra. Ieda Maria Giongo
Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES

Profa. Dra. Marcia Jussara Hepp Rehfeldt
Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES

Dra. Marta Cristina Cezar Pozzobon
Universidade Federal de Pelotas - UFPel

Lajeado, outubro de 2020

AGRADECIMENTOS

Ao final de mais uma etapa, meus sinceros agradecimentos:

- A Deus, por me conceder saúde, força, coragem para superar todas as dificuldades encontradas nessa caminhada.
- À minha orientadora Dra. Marli, pela paciência, pela compreensão, pelo apoio e pela competência em orientar, tornando possível a conclusão desta dissertação.
- Às professoras que participaram da banca de qualificação pelas palavras de incentivo e pelas contribuições, que enriqueceram ainda mais a minha pesquisa.
- Aos meus pais, Reni e Nair, pelo apoio, pelo incentivo para sempre continuar buscando conhecimentos; pelo esforço e dedicação no cuidado com os meus filhos enquanto escrevia minha dissertação.
- Ao meu esposo Luciano, pela paciência, pelo incentivo na busca dos meus ideais, ajudando-me a superar e a enfrentar os contratempos que surgiram no decorrer da nossa caminhada.
- Aos meus filhos, Davi e Caio, pelo amor incondicional, que, apesar de não compreenderem minha ausência por estar dedicada aos estudos, sempre muito afetuosa e carinhosa, fizeram dos momentos em que estávamos juntos, motivos de alegria para esquecer os problemas da vida.

RESUMO

A pesquisa, desenvolvida numa turma de 5º ano do Ensino Fundamental, utilizou a metodologia de Investigação Matemática. O objetivo do estudo foi analisar estratégias e conjecturas elaboradas por alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental ao realizarem tarefas investigativas, envolvendo o trabalho coletivo, abrangendo a unidade temática Geometria. A prática pedagógica foi desenvolvida em 16 horas-aula, com sete alunos do 5º ano de uma Escola Municipal, situada no Vale do Taquari. Para a coleta de dados, cada aluno recebeu um diário de campo, que serviu para transcrever as resoluções das tarefas propostas e suas conjecturas e percepções no decorrer da prática pedagógica. Os dados também foram coletados por meio de gravadores de voz e filmagens. Foram desenvolvidas tarefas que envolvem construção e planificação de sólidos geométricos, sequências, deslocamento e localização de pessoas, desenhos de polígonos, áreas e perímetros. Por não estarem acostumados com a Investigação Matemática nas aulas, inicialmente, os discentes sentiram-se desconfortáveis, pois não entendiam que cabia a eles a escolha do caminho a ser seguido para chegar ao resultado final. Ao longo das tarefas propostas, os estudantes perceberam que existem diferentes formas de resolver uma atividade que envolve Investigação Matemática. O trabalho em grupo também possibilitou-lhes desenvolver e exercitar habilidades como decidir, debater e respeitar, desenvolvendo a capacidade de ouvir e de respeitar opiniões diferentes, colaborar uns com os outros e auxiliar os que apresentavam maiores dificuldades, permitindo assim que participassem mais ativamente e com mais autonomia da própria aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria. Investigação Matemática. Ensino Fundamental. Trabalho em grupo. Estratégias e conjecturas.

ABSTRACT

The research, developed in a class of 5th year of Elementary School, used the methodology of Mathematical Research. The goal was to analyze strategies and conjectures developed by students in a class of the 5th year of Elementary Education when carrying out investigative tasks, involving collective work, covering the thematic units Geometry. The pedagogical practice was developed in 16 class hours, with seven students from the 5th year of a Municipal School, located in Vale do Taquari. In the development of the proposal, the three main moments of the use of Mathematical Research were observed, highlighted by Ponte, Brocardo and Oliveira (2006): presentation and understanding of the proposal, development / carrying out of the investigation and discussion of the results, hypotheses and conjectures. For data collection, each student received a field diary, which served to transcribe the resolutions of the proposed tasks, their conjectures and perceptions during the pedagogical practice. The data was also collected through voice and video recorders. Tasks were developed that involve construction and planning of geometric solids, sequences, displacement and location of people, polygon design, areas and perimeters. As they were not used to Mathematical Research in classes, initially, the students felt uncomfortable, as they did not understand that it was up to them to choose the path to be followed to reach the final result. Throughout the proposed tasks, students realized that there are different ways to solve an activity that involves Mathematical Investigation. The group work also enabled them to develop and exercise skills such as deciding, debating and respecting, developing the ability to listen and respect different opinions, collaborate with each other and assist those who had the greatest difficulties, thus allowing them to participate more actively and with more autonomy of learning itself.

Keywords: Geometric. Mathematical Research. Elementary School. Group work. Strategies and conjectures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Grupo A1 formulando estratégias para resolver a tarefa 1	511
Figura 2 - Alunos do grupo A3 formulando suas conjecturas para resolver a tarefa 1	532
Figura 3 - Cubos confeccionados pelos alunos no encontro anterior	555
Figura 4 - Painel com informações sobre os cubos	587
Figura 5 - Painel de relação entre os cubos, de acordo com os cubinhos coloridos em cada face	6059
Figura 6 - Estratégias elaboradas pelo grupo C1 para resolver a tarefa 2	632
Figura 7 - Integrantes do grupo C2 elaborando estratégias para resolver a tarefa 2	643
Figura 8 - Comprovação de que o número de cubinhos coube na planificação	665
Figura 9 - Grupo C2 fazendo a planificação do sólido construído	676
Figura 10 - Percurso desenhado pelo grupo F2	6968
Figura 11 - Estratégia utilizada pelo Aluno D, ao tentar realizar a tarefa 4	721
Figura 12 - Tarefa realizada pelo aluno P.....	743
Figura 13 - Relatório dos alunos M e N, encontrados no diário de campo	754
Figura 14 - Dobradura e recorte formando peças em forma de quadriláteros	765
Figura 15 - Momento do recorte da dobradura formando a peça em forma de um octógono.....	787
Figura 16 - Tarefa realizada pelo aluno P, integrante do grupo V1	810
Figura 17 - Tarefa realizada pelo aluno M, integrante do grupo V2	810
Figura 18 - Tarefa realizada pelo grupo V1	854
Figura 19 - Tarefa realizada pelo grupo V2	865

Figura 20 - Momento da Socialização da Tarefa 5.....	876
--	-----

Figura 21 - Estratégia utilizada pelo grupo J1 para encontrar a área da tarefa 6.....	8987
Figura 22 - Estratégia utilizada pelo grupo J1 para encontrar o perímetro da tarefa 6	9089
Figura 23 - Outra estratégia do grupo J1 para encontrar o perímetro da tarefa 6.....	909
Figura 24 - Estratégias utilizadas pelo grupo J2, para encontrar o valor da área da folha colhida	910
Figura 25 - Integrantes do grupo J1, verificando o perímetro com o barbante	932
Figura 26- Integrantes do grupo J2, verificando o perímetro com o barbante	932
Figura 27 - Estratégia encontrada pelo grupo G1	954
Figura 28 - Tabela construída pelo grupo G1	976
Figura 29 - Estratégia utilizada pelo grupo G2.....	976
Figura 30 - Quadro construída pelo grupo G2.....	9998
Figura 31 - Estratégia utilizada pelo grupo G3, para realizar a tarefa 7	9998

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Momentos da realização de uma investigação	21
Quadro 2 - Objetos de conhecimento e habilidades desenvolvidos ao longo do 5º ano do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC	310
Quadro 3 - Relação das dissertações do PPGECE sobre Investigação Matemática.....	332
Quadro 4 - Objetivos e tarefas desenvolvidas por encontros	476
Quadro 5 - Tarefa 1: O cubo.....	5049
Quadro 6 - Continuação da tarefa 1	565
Quadro 7 - Cálculos realizados para testar uma estratégia.....	609
Quadro 8 - Tarefa 2: sequência dos cubos.....	621
Quadro 9 - Estratégia formulada pelos alunos do grupo C1	643
Quadro 10 - Estratégia do grupo C2 para realizar a tarefa	654
Quadro 11 - Tarefa três: localização e deslocamento de pessoas no espaço	668
Quadro 12 - Tarefa 4: construir figuras a partir de dobraduras	710
Quadro 13 - Estratégia construída pelos alunos do 5ºano ao resolverem a tarefa 4.....	776
Quadro 14 - Estratégias elaboradas para desenvolver a tarefa 4	779
Quadro 15 - Tarefa: nomenclatura de polígonos e medidas de áreas e perímetros	8079
Quadro 16 - Segunda parte da tarefa 5	843
Quadro 17 - Tarefa 6: cálculos de áreas e perímetros de figuras planas irregulares	887
Quadro 18 - Tarefa 7: figuras com a mesma área, mas com perímetros diferentes	943
Quadro 19 - Registro das estratégias do grupo G1	954
Quadro 20 - Síntese das 7 tarefas realizadas na prática pedagógica	1010

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1 Investigação Matemática	18
2.2 O estudo da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental	26
2.3 Alguns estudos envolvendo Investigação Matemática e Geometria em dissertações.....	33
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	41
3.1 Sobre a Pesquisa	41
3.2 Sobre a Prática Pedagógica	44
4 ANÁLISE DOS DADOS EMERGENTES DAS TAREFAS INVESTIGATIVAS.....	49
4.1 Tarefa 1: construção de cubos.....	49
4.1.1 Primeiro encontro.....	49
4.1.2 Segundo encontro	55
4.2 Tarefa 2: sequência de cubos.....	62
4.3 Tarefa 3: orientação e localização no espaço	68
4.4 Tarefa 4: construção de figuras usando dobraduras	71
4.5 Tarefa 5: cálculo de áreas e perímetros.....	79
4.6 Tarefa 6: área e perímetro de figura irregular	88
4.7 Tarefa 7: relação entre área e perímetro.....	94
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	103
REFERÊNCIAS	107
APÊNDICES	113
APÊNDICE A - Declaração de Anuência da escola e consentimento da turma para realizar a prática pedagógica.....	114
APÊNDICE B - Modelo de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido	115

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da trajetória como professora na Educação Básica, muitos fatores contribuíram e se constituíram como marcos decisórios no processo de busca e de aperfeiçoamento profissional. O desejo de aprofundar o conhecimento para aprimorar a atuação no trabalho; o gosto pelo estudo; o desejo de conhecer outras perspectivas em relação à minha profissão; a importância da academia como ambiente formador e de desenvolvimento profissional não só para pesquisadores e professores universitários, mas também para os da Educação Básica foram fatores que me motivaram a buscar o Mestrado em Ensino de Ciências Exatas.

Cursei o Ensino Médio Magistério no Centro de Formação e Aperfeiçoamento de Professores (CFAP), na cidade de Estrela. Ficava no internato do próprio colégio, de segunda a sexta-feira, pois minha residência ficava distante da escola. Durante o período em que estudei lá, aprendi a viver. Com quinze anos, tive que aprender a me virar sozinha, sem meus pais, e começar a resolver os problemas por conta própria. Assim, ainda na adolescência, de certa forma, tornei-me adulta.

Concluí o magistério em 1997. No ano seguinte, comecei a atuar como professora de séries iniciais do Ensino Fundamental, hoje chamados de anos iniciais, com turmas multisseriadas, numa escola no interior do município de Coqueiro Baixo¹. Os anos foram

¹ O município de Coqueiro Baixo, localiza-se no Vale do Taquari, no estado do Rio Grande do Sul. Atualmente habitam 1508 munícipes. Devido a nuclearização das escolas, hoje o município possui apenas uma escola de Ensino Fundamental Completo, agregando 93 alunos do 1º ao 9º ano. A escola é nomeada como Escola Municipal de Ensino Fundamental Heitor Villa-Lobos, localizada no centro da

passando e senti necessidade de buscar especialização.

Como tinha dificuldade de memorizar e a matemática me possibilitava aprender fazendo, criando, sem a decoreba, optei por cursar graduação nesta área. Além disso, era a disciplina de que mais gostava. Então, em 2003, iniciei a graduação em Matemática, na Universidade Luterana do Brasil - ULBRA, na cidade de Canoas, por meio do projeto “Brasil 500 Anos”. Após alguns anos de estudo, no semestre 2007/2, concluí a graduação.

Mesmo que tivesse uma bagagem maior de conhecimentos, aprendizagens e experiências, sentia que não podia parar de pesquisar e de buscar conhecimentos. Entretanto, fiquei alguns anos sem voltar à universidade. Um convite para atuar na Secretaria Municipal de Educação de Coqueiro Baixo aumentou minha inquietação e percebi a necessidade de buscar especialização num curso de pós-graduação. Por isso, especializei-me em Pedagogia Gestora: orientação e supervisão escolar, o que contribuiu para minha experiência frente ao órgão municipal.

Até então, sempre tinha atuado nos anos iniciais. Em 2011, além de atuar neste nível, passei a lecionar nos três anos do Ensino Médio, no município onde resido, o que proporcionou uma experiência significativa. Depois desses três anos atuando no Ensino Médio, a partir de 2014, devido à aprovação num concurso para séries finais do Ensino Fundamental, tive a carga horária ampliada para 45 horas no município e passei a trabalhar com anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, com os quais atuo até hoje.

A partir de 2015, após a nucleação das escolas, passei a atuar com todas as turmas do 4º ao 9º ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Coqueiro Baixo, com a disciplina de Matemática. Até 2016, foi um período de adaptação, pois as turmas do 4º e do 5º ano, até então, eram unidocentes, isto é, com apenas um professor em cada turma. A partir de 2016, passou a ser por disciplina, ou seja, cada professor atuava na sua área específica. Nas turmas do 6º ao 9º ano, foi minha primeira experiência como docente de matemática. Em 2017, passei por diversas inquietações e inúmeros questionamentos. Percebia que era preciso dar espaço maior ao estudo da Geometria, o que envolvia mudança significativa, pois seria necessário dedicar um tempo maior ao preparo e ao estudo para realizar um trabalho de qualidade.

cidade, agregando todos os alunos do município. A maior turma de alunos é composta por 16 alunos, as demais são todas inferiores a este número.

Reconhecendo a importância da Geometria como campo do conhecimento, além das minhas inquietações e questionamentos, decidi buscar um espaço e conhecimentos para poder trabalhar com mais ênfase essa temática, no contexto onde atuo como professora. Passos (2000) considera que o conhecimento básico de Geometria é fundamental para os indivíduos interagirem com o meio e que esse conhecimento (conceitos, propriedades e relações simples de Geometria) deveria ser introduzido nos anos iniciais, para que, na sequência do Ensino Fundamental, os alunos pudessem compreender de forma significativa seus fundamentos. Para Fainguelernt (1999), o trabalho com a Geometria deve estar presente desde os primeiros anos de escolaridade, pois assim possibilita-lhe a construção de um caminho que o ajudará a fazer a passagem do estágio das operações concretas para as operações abstratas.

Para Maldaner (2011), o estudo da Geometria, além de ajudar o aluno a situar-se de forma mais autônoma no espaço e de contribuir para o seu desenvolvimento cognitivo, potencializa atitudes contemplativas e exploratórias, permitindo que observe as formas geométricas presentes na natureza e nos objetos criados pelo homem. A autora citada acrescenta que a Geometria torna-se importante e significativa no âmbito escolar, quando é vivenciada com experiências do cotidiano. Multiplicando seus conhecimentos com objetos e com o espaço, o aluno desenvolve noções de direção, sentido, distância, entre outras, necessárias à construção do pensamento geométrico. Nesse sentido, Kluppel e Brandt (2012, p. 3) ressaltam a importância de trabalhar o tema, argumentando que “a Geometria é um campo de conhecimento de inquestionável importância para a formação dos alunos, pois contribui para o desenvolvimento de um raciocínio geométrico e de habilidades”.

Levando em consideração as ideias citadas e a importância de inserir a Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, as inquietações em torno da realidade em que atuo como professora tornaram-se mais latentes. Por que um assunto de tanta ênfase é trabalhado de maneira tão superficial? Por falta de tempo? Por falta de domínio do professor? Em função da necessidade de um ambiente específico para o trabalho?

O fato de a Geometria ser preterida no ensino da matemática também é justificado pela fala de autores que se ocupam com este tema. Perez (1991) e Pavanelo (1993) apresentam algumas causas que justificam a ausência do ensino da Geometria. Duas delas estão forte e diretamente relacionadas à sala de aula: a primeira é que muitos professores não têm os conhecimentos geométricos necessários para a realização das práticas pedagógicas. Desconhecendo o poder, a beleza e a importância dela para a formação do futuro cidadão, resta-

lhe a opção de tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou, então, não ensiná-la. A segunda causa da ausência da Geometria nas aulas é a importância dada ao livro didático, pois há professores que possuem falta de conhecimento e o livro é uma possibilidade em que o conteúdo está desenvolvido.

Ao refletir sobre minhas vivências e experiências em sala de aula como docente, percebi que a maioria das práticas que realizava era uma cópia da forma como eu havia aprendido. Ou seja, as aulas se restringiam às explicações do conteúdo no quadro, quase sempre em conformidade com o livro didático, com a demonstração de ideias, técnicas e caminhos, a partir dos quais os alunos realizavam listas de exercícios, aplicando diretamente os métodos que lhes foram apresentados.

Assim, a mudança era inevitável, inadiável. Urgia encontrar uma metodologia na qual os alunos fossem os autores de sua aprendizagem e a desenvolvessem de forma autônoma. Precisava de um método que lhes permitisse pensar, criar, descobrir estratégias para resolver determinadas situações e, principalmente, que não fossem meros reprodutores, mas que mostrassem o caminho descoberto e trilhado para chegar aos resultados.

Ao longo do curso de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, algumas dessas inquietações foram diminuídas por meio das diversas metodologias apresentadas, estudadas, pesquisadas, debatidas e colocadas em prática. Ao analisar e pesquisar, no decorrer das disciplinas deste curso, as tendências que podiam possibilitar resultados promissores ao ensino da matemática, foquei esta pesquisa na metodologia da Investigação Matemática, que vem ao encontro do que estava buscando.

Acredito que a metodologia da Investigação Matemática possibilita ao aluno desenvolver habilidades do pensamento, associadas à ideia de procurar, questionar, querer saber, transformando-o em sujeito responsável pelo seu próprio conhecimento. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), tarefas que envolvem a Investigação Matemática instigam os alunos à descoberta de novos saberes, por meio de problemas abertos que propiciam o levantamento de conjecturas possíveis de serem testadas e matematicamente registradas. Ademais, os autores citados acrescentam que investigar não significa apenas resolver problemas difíceis, descobrir fórmulas novas, ou inventar novos conceitos. Significa, outrossim, a formulação de questões de interesse próprio, para as quais não há respostas prontas; portanto, necessitam ser investigadas, com base em processos fundamentados e rigorosos para que as

respostas sejam matematicamente válidas. Nesse tipo de metodologia, o professor age como um orientador, auxiliando e questionando os discentes, ou seja, o educador não se limita a um mero transmissor do conhecimento, reproduzido pelos alunos.

Tendo em vista a busca de possibilidades para incentivar um melhor desempenho na aprendizagem dos alunos, a maioria à espera de respostas prontas, é necessário um olhar diferenciado, um olhar que reflete sobre as práticas pedagógicas e sobre a metodologia utilizada. Dessa forma, em vez de ir diretamente ao caminho já traçado, à solução pronta, nesta metodologia, no decorrer das tarefas, ocorrem perguntas que instigam e incentivam os estudantes a descobrirem caminhos para a solução dos problemas, enfatizando a necessidade de justificar suas descobertas, desenvolvendo o pensamento matemático e, consequentemente, atribuindo novos significados ao conhecido.

Dado este contexto, o tema deste trabalho foi o uso de Investigação Matemática em tarefas relacionadas ao ensino de Geometria, envolvendo alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, o problema de pesquisa foi: Quais estratégias e conjecturas são elaboradas por alunos de uma turma de 5º ano, ao realizarem tarefas de Investigação Matemática envolvendo a unidade temática Geometria?

O objetivo geral do estudo foi analisar estratégias e conjecturas elaboradas por alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental ao realizarem tarefas investigativas, envolvendo o trabalho coletivo, abrangendo a unidade temática Geometria.

Os objetivos específicos deste estudo foram:

- Explorar tarefas investigativas com foco em alguns conceitos geométricos para proporcionar a troca de ideias entre os alunos, a interação e o trabalho coletivo.
- Identificar conjecturas e estratégias elaboradas pelos estudantes do 5º ano ao realizarem tarefas investigativas envolvendo alguns conceitos geométricos de figuras planas e espaciais, de áreas e perímetros, noções de volume, bem como localização de pessoas no espaço.

Os conteúdos abordados neste estudo são recomendados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)². Muitas foram as mudanças ocorridas neste novo documento. Alguns

² A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que tem objetivo de nortear o que é ensinado nas

conteúdos foram reorganizados e outros novos foram inseridos. Na matemática, a Geometria foi classificada como uma das cinco unidades temáticas relacionadas, dando maior ênfase a esse estudo desde os anos iniciais (BRASIL, 2018).

Esta intervenção pedagógica foi desenvolvida com uma turma do quinto ano do Ensino Fundamental, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Heitor Villa-Lobos, do município de Coqueiro Baixo, no Vale do Taquari/RS. A instituição integra a rede municipal de ensino. É a única escola com anos finais do Ensino Fundamental, atendendo 80% dos alunos do interior e do centro da cidade. Agrega, em 2020, 93 alunos do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental. O estudo das turmas do 1º ao 3º ano é realizado por currículo e o das demais turmas (do 4º ao 9º ano), por disciplina. A maioria dos estudantes é oriunda de famílias de origem italiana, filhos de agricultores.

As tarefas desenvolvidas com a turma do 5º ano enfatizaram a Investigação Matemática, com o intuito de os discentes agirem como matemáticos e de fomentar o trabalho em grupo. A opção por desenvolver a prática em grupos foi motivada pelo fato de serem necessárias a interação e a discussão das conjecturas, como também pelo fato de, na turma investigada, muitas vezes, ainda que o trabalho fosse em grupo, cada integrante desenvolvia uma parte, sem socializar dúvidas e ideias com os colegas.

Após esta breve introdução, no capítulo dois, apresento os aportes teóricos que fundamentaram esta pesquisa. Tendo como foco a metodologia de Investigação Matemática, apresento os conceitos, destacando as fases de uma tarefa investigativa, o desenvolvimento do trabalho e o papel do aluno e do professor numa aula que envolve tarefas de investigação.

Ademais, no capítulo dois, acrescento o estudo referente ao ensino da Geometria. Na revisão da literatura, analiso alguns autores, bem como as contribuições apresentadas pela Base Nacional Comum Curricular, documento normativo do ensino no país, que enfatiza o ensino da Geometria. Na última seção deste capítulo, apresento o estado da arte que engloba algumas dissertações publicadas, envolvendo a Investigação Matemática e o estudo da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No terceiro capítulo, descrevo a metodologia escolhida para desenvolver esta pesquisa de cunho qualitativo. Explicito como foi desenvolvida a intervenção pedagógica, os

escolas do Brasil inteiro, englobando a Educação Básica, que vai da Educação Infantil até o final do Ensino Médio.

instrumentos de coleta de dados, bem como a forma de análise dos dados efetivada.

No quarto capítulo, descrevo e analiso os dados emergentes da pesquisa realizada, interligando-os ao referencial teórico, bem como enfatizo as estratégias formuladas pelos alunos no decorrer da realização das tarefas. Já no quinto, apresento as considerações finais, sintetizando os principais resultados, considerando os objetivos desta pesquisa. Por fim, apresento as referências utilizadas e os apêndices.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresento os aportes teóricos que fundamentam esta pesquisa. Disserto sobre “A Investigação Matemática”, uma tendência vinculada a métodos diferenciados de ensinar e aprender, destacando alguns conceitos sobre Investigação Matemática, o desenvolvimento de uma aula envolvendo tarefas de Investigação Matemática, o papel do aluno e do professor no decorrer desta metodologia. Além disso, apresento ideias sobre a importância do estudo da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Na última seção, apresento algumas dissertações com foco na “metodologia de Investigação Matemática” e o estudo da “Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental”, encontradas no Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade do Vale do Taquari (UNIVATES), bem como algumas de outras Instituições de Ensino Superior – todas disponíveis no portal da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

2.1 Investigação Matemática

Embora a integração das tarefas de Investigação Matemática como metodologia tenha surgido a partir dos anos 1980 e 1990, ela ainda é pouco desenvolvida em sala de aula, pelos professores, provavelmente, porque a matemática, de acordo com Abrantes (1994), está associada a atividades mentais, às práticas em sala de aula em que predominam a aritmética e a capacidade rotineira de cálculos, nas quais, muitas vezes, o professor ensina e os alunos reproduzem e praticam sem estabelecer relação com a vida. Conforme Abrantes (1994, p. 15), “a Matemática escolar desfrutou quase sempre de renome como uma disciplina do cérebro e da inteligência”.

Oliveira, Segurado e Ponte (2010) mencionam que, por ser ampla no contexto matemático, a Investigação Matemática envolve processos matemáticos de formulação, testagem, justificativa e comprovação de conjecturas, reflexão e generalização. Assim, de natureza aberta, as tarefas de investigação fazem referência essencialmente aos “contextos matemáticos, conduzindo a determinados processos matemáticos como formular, testar, justificar, provar conjecturas, refletir e generalizar” (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1998, p. 109).

Segundo Ponte (2017), o termo “investigar” pode ser usado com muitos sentidos. Pode ser algo realizado por investigadores profissionais ou ser uma atividade do dia a dia. Investigar, de acordo com o referido autor, é cada vez mais necessário, em muitas atividades sociais e deve estar presente tanto na escola, na formação e na aprendizagem dos alunos, quanto na prática profissional.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), tarefas que envolvem Investigação Matemática estão associadas à formulação de questões para as quais não há respostas prontas e que interessam às pessoas. São tarefas que, inicialmente, apresentam-se de modo confuso, mas que podem ser resolvidas por meio de conjecturas, as quais são testadas e comprovadas. Ademais, para esses autores, investigar constitui uma poderosa forma de conhecimento, pois “investigar é procurar conhecer o que não se sabe” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 13).

Skovosmose (2015) acrescenta que um dos desafios do ensino da matemática é proporcionar aos alunos tarefas que envolvam pesquisa e investigação. Segundo o autor, elas são “cenários de investigação”; quando apresentadas aos alunos, tornam-se um momento de abertura de possibilidades de sentido, pois envolvem pesquisa e, naturalmente, ocorre a manifestação de algum tipo de envolvimento e interesse por parte do pesquisador, apontando maneiras de como a aprendizagem pode acontecer. Ainda, de acordo com Skovosmose (2015, p. 98), a ideia de investigação propicia liberdade, incentivando assim várias maneiras de reflexão, uma vez que, “enquanto o paradigma de exercícios impõe instruções fechadas do que fazer e como fazer, cenários para investigação abrem espaços para investigar” (SKOVOSMOSE, 2015, p. 98).

Braumann (2002) compara aprender a fazer Investigação Matemática com aprender a andar de bicicleta. Para aprender, nessa perspectiva, é preciso montar na bicicleta e andar, errando e aprendendo com os erros, e não apenas vendo os outros andarem e recebendo

informações. Da mesma forma, na Investigação Matemática, o aluno é um agente na construção do seu próprio conhecimento, isto é, não se limita à compreensão da matemática já pronta, mas tem como finalidade a exploração por meio da experimentação, da pesquisa de um conjunto de questões e conjecturas. O autor salienta:

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática. Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos (BRAUMANN, 2002, p. 5).

Nessa linha de pensamento, as tarefas investigativas podem ajudar a entender a matemática não como ciência exata, mas como ciência em construção. Para Lamonato e Passos (2011), investigar é pertinente à ideia de curiosidade, de querer saber, de questionamentos. Ou seja, a partir da inquietação que estimula a curiosidade, é possível desenvolver a investigação.

A investigação, além de envolver uma metodologia, abarca a pergunta orientadora, a tarefa de divulgação e a partilha. Inicia-se com um problema teórico ou prático, para o qual se procura uma resposta convincente. A tarefa termina quando a resolução for apresentada a um grupo, momento em que é discutida e validada. Ponte (2017, p. 60) afirma que “se temos uma questão para a qual já conhecemos uma resposta, não se trata de fazer uma investigação, mas, sim, uma verificação ou comprovação”. Para Jack Beillerot (2001) apud Ponte (2017, p. 59), existem três condições fundamentais para que uma tarefa constitua uma investigação: “(i) produz conhecimentos novos, ou, pelo menos, novos para quem investiga; (ii) segue uma metodologia rigorosa; (iii) é pública”.

Considerando esse contexto, tarefas de Investigação Matemática podem gerar curiosidades em relação à situação-problema proposta pelo professor. Polya (1995) distingue a investigação, dos problemas e dos exercícios. Segundo o autor, nos problemas, se dispõe de um método que permite uma resolução imediata; da mesma forma, um exercício pode ser resolvido usando um método já conhecido. Ainda, para o referido pesquisador, tanto os problemas como os exercícios indicam claramente nos enunciados, o que é dado e o que é solicitado; logo, a resposta está correta ou errada. Já na Investigação Matemática, o aluno é convidado a agir na formulação de questões e de conjecturas, na discussão, na argumentação e na apresentação dos resultados.

De acordo com Alro e Skovsmose (2010), o processo investigativo deve contemplar tarefas em que os alunos são convidados a realizá-las, a fim de se tornarem condutores e

participantes ativos do processo de investigação. Por isso, de acordo com os autores, é preciso enfatizar elementos como: perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar, avaliar e estabelecer contato. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 23) salientam:

Os exercícios e os problemas têm uma coisa em comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margens para ambiguidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de uma situação mais aberta – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes.

Ademais, os referidos autores compreendem que, para a Investigação Matemática, é necessário abranger quatro etapas importantes. A primeira é a do reconhecimento da situação, que inclui a sondagem inicial e a formulação da questão. A segunda engloba a formulação de conjecturas, que são testadas e refinadas no terceiro momento. Já, no último estágio, as conjecturas são transformadas em argumentação e demonstração, a fim de validar o trabalho realizado. Além disso, segundo esses autores, cada um dos momentos pode incluir diversas atividades, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 - Momentos da realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Reconhecer uma situação- problema ✓ Explorar a situação problemática ✓ Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Organizar dados ✓ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Realizar testes ✓ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Justificar uma conjectura ✓ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 21).

Analisando o Quadro 1, percebe-se que a realização de uma tarefa investigativa requer tempo. Em todos os momentos apresentados, há interações entre os componentes do grupo. É necessário identificar a situação-problema para construir hipóteses e elaborar as conjecturas, que podem surgir de diferentes formas; porém, é preciso testá-las e fundamentá-las, a fim de verificar a validade delas.

Em vista disso, ao realizar uma aula de investigação, de acordo com Ponte, Brocardo,

Oliveira (2006), é necessário habituar-se a desenvolver três momentos. No primeiro, o professor faz a proposta aos alunos, garantindo que todos entendam o sentido da tarefa. É fundamental que o aluno entenda qual é a atitude que o professor espera dele em relação à proposta. Por isso, é necessário que ele possa expor suas ideias, pensar e discutir, tanto com o docente como com os colegas do grupo. Também é preciso que os discentes saibam que podem contar com o apoio do professor, mas que a resolução da tarefa depende, essencialmente, da iniciativa deles. Nessa perspectiva, os autores salientam:

Essa atitude investigativa na abordagem da tarefa deve ser estimulada pela introdução feita pelo professor, o qual poderá, em especial com os alunos mais novos, utilizar expressões próximas dessa ideia e que ajudam a clarificar o seu sentido. Por exemplo, incentivar os alunos a serem “pequenos exploradores” ou a “partirem à descoberta” são metáforas que transmitem o sentido de investigação e que ajudam a marcar a diferença em relação às tarefas a que os alunos estão habituados (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 27).

Em relação ao primeiro momento da aula, Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) acrescentam que a fase introdutória é importante, principalmente, se os alunos não estiverem familiarizados com a metodologia de Investigação Matemática. Em efeito,

[...] para que a tarefa possa realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos. Para isso, o professor tem necessidade de fazer uma pesquisa em torno de vários materiais que podem variar entre manuais escolares, livros com propostas de problemas e investigações e, mais recentemente, o mundo da *Internet*. Mas mais do que esta pesquisa, ele precisará de recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objectivos (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 10).

Uma vez assegurada a compreensão dos alunos a respeito da tarefa a ser realizada, segue-se o segundo momento, o desenvolvimento do trabalho, a realização da investigação. Nessa etapa, é fundamental o acompanhamento do professor, que deve observar e compreender como o trabalho realizado pelos alunos está sendo processado e prestar apoio, se necessário. De acordo com Ponte (2017), ao propor uma tarefa investigativa, os alunos devem explorar a formulação de questões e de conjecturas, o teste, a reformulação e a justificativa dessas conjecturas e a avaliação do trabalho.

Ainda, durante a segunda etapa, a de desenvolvimento do trabalho, é necessário o registro escrito das conjecturas, pois, nesta etapa, surgem os conflitos, a necessidade de explicitarem suas ideias e estabelecerem um consenso em relação às ideias levantadas. No registro, os alunos devem descrever os resultados o mais fielmente possível, pois a escrita permite ao professor analisar o desempenho dos discentes e organizar as aulas seguintes.

Além disso, justificar ou provar as conjecturas é uma vertente do trabalho investigativo. Assim, é fundamental a intervenção do professor para que a investigação não seja empobrecida. Os docentes precisam compreender que as conjecturas são hipóteses, suposições, que precisam ser testadas, aprimoradas e aperfeiçoadas.

O terceiro momento, apontado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), é a discussão dos resultados, etapa em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado, suas estratégias, conjecturas e justificativas. Nesse processo, cabe ao professor assegurar que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada.

Conforme já exposto, o docente tem um papel importante no decorrer das aulas de Investigação Matemática. Essa relação entre docente e discentes, no entanto, representa um desafio adicional à prática pedagógica, levando-os a enfrentar certas dificuldades. Assim, é evidente que as tarefas de Investigação Matemática devem ter um contexto para gerar aulas favoráveis e produtivas, nas quais é possibilitado aos estudantes expor suas ideias aos colegas e ao professor, relatar-lhes suas convicções e argumentá-las.

No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria de investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. [...] Desse modo, o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 47).

Nesse sentido, o professor deixa de ser aquele que apenas transmite conhecimentos para ser um orientador, um estimulador dos processos que levam os alunos a construir seus conceitos, valores, atitudes e habilidades que permitem que eles cresçam como pessoas. Assim, o desenvolvimento de uma aula de Investigação Matemática depende das indicações e do apoio que o professor fornece aos alunos. Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) destacam que, em muitas situações, o docente é chamado pelos alunos para intervir; logo, deve estar preparado para reagir com atitudes questionadoras, usando regularmente a pergunta “por quê?”, de modo a provocar o raciocínio e fazer com que o discente analise, reflita e procure significado para suas descobertas ao longo do seu trabalho. Ainda, segundo os autores,

[...] muitas vezes, as solicitações feitas pelos alunos ao professor vão no sentido de validar os seus processos ou ideias. Como resposta, o professor não deverá emitir opiniões muito concretas, mas, sim, incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Outras vezes, sendo o confronto de opiniões essencial neste tipo de actividade, o professor deve levar cada aluno a explicar e argumentar a favor do seu ponto de vista

colocando questões como *O que te leva a pensar isso?* ou *Porque não concordas com a ideia do teu colega?* Este tipo de atitude fomenta a interação entre os alunos, que vão aprendendo a discutir, a descobrir novas relações entre conceitos, a ter mais segurança nas suas ideias matemáticas e a desenvolver o raciocínio e a criatividade (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 8).

De acordo com os referidos autores, o professor deve oferecer não apenas informações, mas, principalmente, estímulos para o desenvolvimento de atitudes que possibilitem a continuidade do aprendizado, despertando o gosto pela investigação, a criação de hábitos de estudo, autoconfiança e disciplina. No entanto, é preciso observar que a ajuda aos estudantes não seja pouca, pois poderá não haver progresso; nem demais, para que o método da resolução seja deles próprios.

Em relação ao grau de ajuda aos discentes, Alro e Skovsmose (2010) enfatizam que é importante que o professor saiba fazer o papel de oponente tanto quanto de parceiro, a fim de reforçar a autoconfiança do aluno. O docente, conforme os autores, deve atuar como facilitador ao fazer perguntas com postura investigativa, para conhecer a forma como o aluno interpreta a tarefa, mas também deve estar pronto a ser desafiado pelos próprios educandos no decorrer dos questionamentos.

É possível perceber que a metodologia de investigação, em alguns aspectos, vai também ao encontro da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). O documento normativo apresenta competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental. Entre elas, contempla a importância do estudo por meio da investigação: i) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo; ii) Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes; iii) Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e no desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018). O documento ainda explicita:

Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo[...]”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse

acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos (BRASIL, 2018, p. 277).

Portanto, o discente deve construir conhecimentos e desenvolver habilidades a serem utilizados na vida, em especial, no enfrentamento de problemas e de situações do cotidiano. Durante a realização de tarefas que envolvem a metodologia de Investigação Matemática, faz-se necessário lembrar a importância do trabalho em grupo, que possibilita momentos de discussões, nos quais um aluno pode auxiliar outro, permitindo que sejam protagonistas do próprio aprendizado. Assim, conseguem

[...] promover a cooperação e o debate de ideias entre os estudantes, fazendo com que estes aprendam a ouvir e a se fazerem ouvir; permitir aos estudantes elaborarem suas próprias argumentações, promovendo, entre eles, o uso da linguagem científica; promover habilidades que ajudam os estudantes resolverem exercícios (SILVIA; VILLANI, 2009, p. 22).

Nesta mesma linha de argumentação, Schneider (2011) ressalta a aprendizagem em grupo como um momento privilegiado de desenvolvimento intelectual dos alunos, permitindo-lhes atuar em diferentes papéis no grupo, confrontar seus conhecimentos prévios e perceber a inadequação de suas estratégias de raciocínio. Ainda, de acordo com o autor, o trabalho em grupo ajuda a desenvolver habilidades necessárias para o trabalho cooperativo, que é uma maneira de muitas pessoas aprenderem e trabalharem.

Para Riess (2010), o trabalho em grupo favorece a interação entre os aprendizes, incrementando a qualidade da aprendizagem e a aquisição de novos conhecimentos. Também desenvolve habilidades sociais, possibilita o diálogo entre os integrantes do grupo, facilita a comunicação e a inclusão, oportunizando-lhes a compreensão do significado da ajuda mútua na aprendizagem (RIESS, 2010).

O trabalho em grupo pode ser favorável, principalmente em atividades que exigem a formulação de conjecturas, pois o trabalho cooperativo potencializa o surgimento de diferentes alternativas para a exploração da tarefa (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006). Neste sentido, trabalhando coletivamente, os estudantes podem trocar, experienciar, indagar, refletir e juntos construir com o propósito de que um auxilia o outro nas descobertas, nas conquistas, nas dúvidas e nas certezas.

Tendo em vista que o trabalho em grupo é importante, é necessário intervir durante as tarefas, auxiliando os educandos e orientando-os no sentido de como proceder durante o trabalho cooperativo. Para que o trabalho em grupo oportunize momentos de discussões durante

a realização das tarefas e para que este seja efetivado com sucesso, o profissional envolvido deve planejá-lo e estar preparado para que os resultados sejam promissores. Carmo (2011, p. 68) infere que, com o trabalho cooperativo, há “melhora das habilidades sociais, o aluno poderá ser beneficiado e alguns vão aprender a lidar com a necessidade de aprender a compartilhar, aprender a aceitar ideias e posicionamentos de outros, aprender a trocar conhecimentos”.

Neste contexto, em que se problematiza a prática educativa, para ir em busca de novas metodologias que despertem o interesse de nossos discentes, também deve haver preocupação com os conteúdos abordados, muitas vezes, de maneira superficial pelos docentes. Entre esses conteúdos, destaco o estudo da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sobre os quais discorro na próxima seção.

2.2 O estudo da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Por mais que as pessoas não percebam, ao olharem para o relógio para saber o horário ou ao medirem a quantidade de sal para pôr na comida ou o açúcar para adoçar o café, estão usando conhecimentos matemáticos. Nesse sentido, Piasieski (2010) esclarece que, pelo fato de ser algo fundamental na execução de algumas tarefas diárias, a matemática deve ser trabalhada na escola de forma que os estudantes possam compreendê-la e incorporá-la ao cotidiano, em ações reais e práticas.

A Geometria é um conhecimento utilizado no cotidiano que deveria ser explorado na escola. De acordo com Piasieski (2010), na área da matemática, a Geometria é primordial, pois, além de ser prática, contribui para a construção e o desenvolvimento do pensamento lógico e da cidadania. Ademais, “a Geometria faz parte da vida da criança desde o nascimento e é parte integrante do seu desenvolvimento” (PIASESKI, 2010, p. 19), pois a criança usa-a tanto para mostrar o nível de compreensão da realidade, como para mover-se espacialmente. A Geometria acompanha o ser humano desde os primeiros anos de vida. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 71) salientam que:

A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. É possível conceber tarefas adequadas a diferentes níveis de desenvolvimento e que requerem um número reduzido de pré-requisitos. No entanto, a sua exploração pode contribuir para uma compreensão de fatos e relações geométricas que vai muito além da simples memorização e utilização de técnicas para resolver exercícios-tipo.

Nesse sentido, observa-se que a Geometria contribui para objetivar situações da realidade, como construções artísticas, tanto criadas pelo homem quanto pela natureza, que envolvem esse campo da matemática. Fonseca *et al.* (2002, p. 28) destacam que

[...] o objetivo principal do ensino da Geometria nas séries/ciclos iniciais é a percepção e a organização do espaço em que se vive. Considerando que esse espaço sensível é tridimensional, a proposta é iniciar o estudo da Geometria pela observação desse espaço e pelos modelos que o representam.

Além disso, Fonseca (2001) apud Piascki (2010) afirma que a Geometria está associada à formação do ser humano nos aspectos culturais e estéticos. Fainguelernt (1999) apud Piascki (2010) explica que esse é o ramo da matemática mais concreto, porque propicia aos discentes fazer comparações e embasar-se em ambientes e espaços reais para a resolução de problemas. Citando Fonseca (2001), Piascki (2010, p. 16) também argumenta que o trabalho com a Geometria proporciona o desenvolvimento de competências e habilidades, por oportunizar ao aluno “comparar, medir, generalizar e abstrair”, aprimorando o pensamento lógico. Esse entendimento se aproxima do pensamento de Kluppel e Brandt (2012, p. 3), que ressaltam a importância de trabalhar o tema ao indicarem que “a Geometria é um campo de conhecimento de inquestionável importância para a formação dos alunos, pois contribui para o desenvolvimento de um raciocínio geométrico e de habilidades”.

Fainguelernt (1999) apud Piascki (2010, p. 17) destaca os benefícios para o pensamento, a partir do espaço e da visualização dos objetos.

O estudo da Geometria é de fundamental importância para desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da matemática não fique distorcida.

Na mesma linha argumentativa, Nacarato e Passos (2003, p. 78) explicitam que:

A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão, naquilo que está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis.

Tendo em vista as contribuições da Geometria para o desenvolvimento do pensamento lógico e da cidadania, bem como sua estreita relação com a realidade, é relevante que o ensino da matemática por meio da Geometria oportunize, segundo Piascki (2010, p. 16), “um significado ao aluno”. Isto é, a partir da teoria, o aluno deve promover reflexões e aplicar os seus conhecimentos na prática. Nessa perspectiva, Piascki (2010, p. 17) entende que melhorar

as habilidades visuais significa “perceber, representar, transformar, descobrir e refletir sobre informações vistas”, o que abarca processos mentais que podem ser usados em outros ramos da matemática e em outros campos do conhecimento.

Além do exposto acerca das contribuições da Geometria para outras áreas do conhecimento, ela pode ser útil, de acordo com Piascki (2010), apoiando outras disciplinas por meio dos conceitos, da compreensão e da interpretação de mapas, gráficos e medidas. Inclusive, dentro da própria matemática, esse campo pode facilitar o trabalho com a aritmética e a álgebra.

De acordo com Passos (2000), o conhecimento básico da Geometria é fundamental para os indivíduos interagirem com o meio; logo, esse conhecimento (conceitos, propriedades e relações simples de Geometria) já deveria ser introduzido nos anos iniciais, para que, na sequência do Ensino Fundamental, os alunos pudessem compreender de forma significativa seus fundamentos.

Guillen (2013) destaca que os conceitos geométricos, na maioria das vezes, são ensinados somente de maneira teórica, com explicações no quadro ou através de manuais. Ainda, o autor comenta que a Geometria é ensinada a partir dos livros didáticos, que trazem algumas figuras desenhadas que não têm nada a ver com a realidade, porque os objetos que nos rodeiam são tridimensionais. Assim, para o referido autor, é necessário que o estudo da Geometria esteja integrado ao uso de objetos sólidos com representações das formas relacionadas a objetos da realidade, associando cada um à sua forma geométrica, a fim de estimular a percepção visual dos objetos e desenvolver o raciocínio geométrico da criança.

Sales e Medina (2010) salientam que o ensino de Geometria desde os primeiros anos não é priorizado, o que deixa uma lacuna na educação da criança. Destacam que, apesar de alguns elementos geométricos estarem presentes no dia a dia, alguns professores não dão importância às formas encontradas ao redor da criança e quando há a chance de trabalhar, muitas vezes, as práticas não são adequadas.

No cotidiano do professor e das crianças, existem muitos objetos que poderiam ser utilizados como ótimos recursos para o ensino da Geometria, mas, geralmente, passam despercebidos. Esses recursos facilitam a aprendizagem permitindo que o aluno vivencie e descubra as propriedades e os conceitos geométricos, construindo-os de maneira sólida (SILVA; COSTA, 2016). O manuseio desses objetos, do material concreto, permite que a criança desperte o interesse através da exploração, experimentando e manipulando. Segundo

Fonseca *et al.* (2009, p. 74), os materiais manipuláveis

[...] favorecem a análise das características e propriedades das formas geométricas de duas dimensões, as relações estabelecidas entre elas e a representação geométrica. Além disso, permitem resolver infinitudes de problemas geométricos usando a visualização, o raciocínio espacial e a montagem geométrica.

A manipulação com materiais concretos realizada em sala contribui para que os alunos percebam semelhanças e diferenças entre os objetos e assim compreendam melhor os conceitos matemáticos envolvidos, conforme aponta Lorenzato (2011, 2006).

Neste sentido, Santos e Oliveira (2019) acrescentam que a Geometria também se constitui, paradoxalmente, num saber lógico, intuitivo e sistematizado, colocando-se como necessidade primordial na produção do conhecimento e do raciocínio. Ademais, apontam que um dos principais objetivos de estudo no ensino da Geometria nos primeiros anos do Ensino Fundamental é proporcionar ao aluno a compreensão do mundo em que vive, para que aprenda a descrevê-lo, representá-lo e a localizar-se nele. Os referidos autores ressaltam

[...] a essencialidade de provocar reflexões sobre o ensino da Geometria a partir dos primeiros anos da Educação Escolar, viabilizando às crianças a familiaridade com as formas geométricas, conceitos e significados, com práticas coerentes com estudos da área no ensino da Matemática, evidenciando uma aproximação entre a teoria e a prática em Geometria (SANTOS; OLIVEIRA, 2019, p. 3).

É importante lembrar que o saber escolar se apresenta de forma sistematizada e com base em teorias que ajudarão o indivíduo a compreender os conhecimentos construídos no decorrer de sua vida. De acordo com Bardini, Amaral-Schio e Mazzi (2019), os aspectos cotidianos e escolares devem caminhar juntos, pois ambos apresentam igual importância no processo de aprendizagem, já que aprender não é apenas decorar respostas para algumas situações, mas ter a capacidade de explicar, de apreender e compreender e de enfrentar criticamente situações novas.

Além disso, considerando as contribuições da Geometria tanto para a aprendizagem do aluno quanto para sua formação nas outras áreas do conhecimento e sua formação como cidadão, cabe ao docente escolher o que ensinar e como oportunizar o conhecimento ao discente, ou seja, qual metodologia utilizar. Por isso, a seguir, apresenta-se o que a Base Nacional Comum Curricular, documento norteador do ensino no país, recomenda em relação ao ensino da Geometria.

O Ministério da Educação e Cultura (MEC) apresentou, em 2018, a Base Nacional Comum Curricular. Como o nome já indica, trata-se de uma base, ou seja, o essencial que deve

estar no currículo de todas as escolas do país. De acordo com o MEC, tais orientações básicas do currículo escolar foram pensadas e escritas tendo em vista os objetivos constantes na Constituição Federal de 1988, que preveem a formação do aluno para o exercício da cidadania e a qualificação para o trabalho. Ou seja, trata-se das diretrizes da LDB e do Plano Nacional de Educação. A BNCC serve como suporte para as práticas pedagógicas, uma vez que apresenta desde os objetivos de aprendizagem e os conteúdos a serem trabalhados até os critérios avaliativos.

Na área da matemática, a BNCC apresenta oito competências específicas para o ensino da matemática no Ensino Fundamental. Dentre elas, destaca-se uma competência que faz referência ao estudo da Geometria:

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (BRASIL, 2018, p. 265).

A BNCC também considera um conjunto de ideias, como: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, as quais são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento do aluno nos campos que compõem a matemática. Nesse sentido,

[...] a base propõe cinco grandes unidades temáticas correlacionadas, na área da matemática para o Ensino Fundamental, sendo elas: Os Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Essas temáticas norteiam a formulação de habilidades, competências, atitudes e valores a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, podendo receber ênfases diferentes, dependendo do ano de escolarização (BRASIL, 2018, p. 266).

Dentre essas temáticas, há duas que vêm ao encontro desta pesquisa: o estudo da Geometria e Grandezas e Medidas. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular, o estudo da Geometria envolve um amplo conjunto de conceitos e procedimentos, pois

[...] estudar posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (BRASIL, 2018, p. 269).

Ainda, para a BNCC, o estudo da Geometria está associado, principalmente, à construção, à representação, à interdependência, às transformações geométricas e às simetrias. A base também estabelece alguns critérios a serem desenvolvidos no decorrer dos anos iniciais do Ensino Fundamental, no estudo da Geometria, sendo eles: a) identificar e estabelecer pontos

de referência para localização e deslocamento; b) construir representações de espaço conhecido e estimar distâncias; c) indicar características de formas geométricas tridimensionais e bidimensionais; d) associar figuras espaciais a suas planificações e vice-versa; e) nomear e comparar polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos; f) o estudo da simetria através de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano e com recursos de *softwares* de Geometria dinâmica (BRASIL, 2018).

Em relação à unidade temática Geometria, a BNCC colabora na aplicação de noções geométricas, na construção do pensamento algébrico, na consolidação e na ampliação do número. A expectativa do documento norteador em relação a essa temática nos anos iniciais do Ensino Fundamental é que os alunos: a) reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade; b) resolvam situações-problemas cotidianos envolvendo grandezas como: comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos), capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares), sem o uso de fórmulas e, quando necessário, usar as transformações entre unidades de medidas mais usadas. A BNCC evidencia que a divisão dessas temáticas é para facilitar a compreensão do conjunto de habilidades e sua inter-relação, bem como, enfatizar a integração e a relação da articulação das habilidades com as outras áreas do conhecimento e com o interior de cada unidade temática.

Ao longo do documento, na parte explicativa das unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas, são detalhados os objetos de conhecimento e as habilidades que os discentes devem desenvolver ao longo do 5º ano do Ensino Fundamental, de acordo com o que segue no Quadro 2. Destacam-se os descritores do 5º ano por ser o nível em que foram desenvolvidas as tarefas investigativas no decorrer da prática pedagógica.

Quadro 2 - Objetos de conhecimento e habilidades desenvolvidos ao longo do 5º ano do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC

Descritores do 5º Ano	
Geometria	
Objetos de conhecimentos	Habilidades
<ul style="list-style-type: none"> - Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido. - Paralelismo e perpendicularismo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e de representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
<ul style="list-style-type: none"> - Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): 	<ul style="list-style-type: none"> - Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as

reconhecimento, representações, planificações e características.	representações planas e espaciais.
- Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras.	- Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou <i>softwares</i> de Geometria.
- Simetria de reflexão.	- Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de <i>softwares</i> de Geometria.
Grandezas e medidas	
Objetos do conhecimento	Habilidades
- Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	- Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
- Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	- Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
- Medidas de tempo: leitura de horas em relógios digitais e analógicos, duração de eventos e relações entre unidades de medida de tempo.	- Ler e registrar medidas e intervalos de tempo em horas, minutos e segundos em situações relacionadas ao seu cotidiano, como informar os horários de início e término de realização de uma tarefa e sua duração.
- Medidas de temperatura em grau Celsius: construção de gráficos para indicar a variação da temperatura (mínima e máxima) medida em um dado dia ou em uma semana.	- Reconhecer temperatura como grandeza e o grau Celsius como unidade de medida a ela associada e utilizá-lo em comparações de temperaturas em diferentes regiões do Brasil ou no exterior ou, ainda, em discussões que envolvam problemas relacionados ao aquecimento global. - Registrar as temperaturas máxima e mínima diárias, em locais do seu cotidiano, e elaborar gráficos de colunas com as variações diárias da temperatura, utilizando, inclusive, planilhas eletrônicas.
- Problemas utilizando o sistema monetário brasileiro.	- Resolver e elaborar problemas que envolvam situações de compra e venda e formas de pagamento, utilizando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável.

Fonte: Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 07 abr. 2019.

Analisando o Quadro 2, é visível que alguns objetos de conhecimento e algumas habilidades constantes no documento no que se refere à Geometria, se relacionam a práticas do dia a dia. Nessa perspectiva, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 83) já destacavam

[...] as tendências curriculares atuais ao considerar que essa área da matemática é fundamental para compreender o espaço em que nos movemos e para perceber aspectos essenciais da atividade matemática. Salienta-se, por exemplo a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria à situação da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceptual em Geometria.

Outrossim, os autores apontavam a ideia de os professores expandirem as tarefas de investigação geométrica, empreendendo uma recomendação curricular, oferecendo aos alunos oportunidades e tempo para organizarem suas experiências geométricas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006).

Na sequência, apresento a síntese de algumas dissertações de mestrado, disponíveis no site da Universidade do Vale do Taquari e no portal da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), que vinculam a “Investigação Matemática” e a “Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental”.

2.3 Alguns estudos envolvendo Investigação Matemática e Geometria em dissertações

Nesta seção, apresento algumas dissertações com o foco na “Metodologia de Investigação Matemática” ou no estudo da “Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental”. Tais trabalhos foram encontrados no Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade do Vale do Taquari (Univates) e no portal da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Em 2019, havia 173 dissertações no Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), oferecido pela Universidade do Vale do Taquari (Univates), no *site* (<https://www.univates.br/ppgece/>, produções/dissertações), das quais cinco, que se encontram Quadro 3, envolvem a metodologia “Investigação Matemática”.

Quadro 3 - Relação das dissertações do PPGECE sobre Investigação Matemática

Autor	Ano	Título
Fernanda Eloísa Schmitt	2015	Abordando Geometria por meio da Investigação Matemática: um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental
Ludmila Maccali	2017	Atividades investigativas para o ensino da álgebra em turmas de 7º ano e 9º ano do Ensino Fundamental
Mateus Mariani	2018	Cartografia e Investigação Matemática: possibilidades para uma intervenção pedagógica com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental
Leonice Ludwig Rabaiolli	2013	Geometria nos anos iniciais: uma proposta de formação de professores em cenários para investigação
Adelmar Barros Pereira	2015	Investigação Matemática: possibilidade para ensino de trigonometria

Fonte: Da autora (2020).

Schmitt (2015) realizou o trabalho de mestrado intitulado, “Abordando Geometria por meio da Investigação Matemática: um comparativo entre o 5º e o 9º anos do Ensino Fundamental”. O interesse central dessa dissertação era interpretar a formulação de conjecturas elaboradas por alunos de diferentes níveis de aprendizagem em atividades de Investigação Matemática, abrangendo o estudo de Geometria. A pesquisa foi desenvolvida com discentes

das turmas do 5º e do 9º ano de duas escolas públicas de Educação Básica do Vale do Taquari, seleção que, segundo a autora, ocorreu devido à diferença entre as notas do 5º ano e do 9º ano no IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Brasileira).

Os propósitos desta pesquisa foram: i) Averiguar as regras matemáticas utilizadas pelos alunos, em diferentes graus de escolaridade, quando criam e justificam conjecturas acerca de atividades envolvendo Geometria; ii) Disponibilizar para duas turmas de alunos, atividades em consonância com a metodologia de Investigação Matemática; iii) Estimular nos alunos a cultura da escrita em matemática; iv) Proporcionar momentos de trabalho em grupo, promovendo a socialização de aprendizagens. Para atingir esses objetivos, a autora propôs cinco atividades (iguais para todos os grupos) de Investigação Matemática, exploradas pelas duas turmas de 5º ano e 9º ano. O estudo foi fundamentado em pressupostos referentes à investigação em sala de aula definidos por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), em alguns apontamentos trazidos pelos PCN(s) e, também, em contribuições de outros autores da área, como Abrantes (1999), Goldenberg (1999), Skovsmose (2008) e demais pensadores. O trabalho foi desenvolvido tendo como base metodológica a pesquisa qualitativa. Para isso, foram realizadas observações participativas, filmagens e diário de campo da pesquisadora e dos próprios alunos.

Schmitt (2015) percebeu que as turmas – tanto a do 5º ano como a do 9º ano – tiveram dificuldades em adaptar-se à metodologia de Investigação Matemática, principalmente, nas atividades mais abertas, que exigiam a elaboração de estratégias. No entanto, ressalta que esse tipo de atividade proporciona momentos de autonomia, possibilitando aos alunos, maior liberdade para seguirem o próprio caminho e encontrarem soluções para as situações propostas. Constatou que os alunos do 9º ano tinham mais noções de conceitos e fórmulas (áreas e perímetros) do que os do 5º ano. Além disso, os discentes do 9º ano pensavam em estratégias ou fórmulas para resolverem as questões, enquanto os do 5º ano limitavam-se a contar quadradinhos e cubinhos e poucos tentavam usar alguma estratégia diferente. A autora também relata que foi um desafio para ela, enquanto docente e pesquisadora, pois estava acostumada com atividades nas quais instruía os alunos no decorrer do processo, sabendo exatamente onde chegariam.

Ainda, para Schmitt (2015), as tarefas investigativas podem possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do espírito investigativo, oferecem ambiente de interação e de troca, estimulam a cultura da escrita em matemática e oportunizam aos alunos investigarem, pesquisarem, testarem e justificarem suas respostas. A pesquisadora acredita que os professores

devem, cada vez mais, desenvolver metodologias diferenciadas, para que os estudantes sintam-se motivados a aprender, favorecendo o interesse e o entusiasmo pelas atividades matemáticas.

Maccali (2017), com a pesquisa, “Atividades investigativas para o ensino da álgebra em turmas de 7º ano e 9º ano do Ensino Fundamental”, propôs analisar as estratégias elaboradas por alunos do 7º e do 9º ano ao realizarem atividades envolvendo concepções algébricas, utilizando a Investigação Matemática. O estudo teve o intuito de proporcionar aos alunos das turmas mencionadas, de duas escolas públicas do Vale do Taquari-RS, tarefas de Investigação Matemática, contemplando diferentes concepções de álgebra, bem como fomentar o trabalho em grupo e analisar as diferentes estratégias elaboradas por eles ao resolverem as atividades investigativas.

O percurso do trabalho realizado pela autora enfatizou procedimentos metodológicos que visaram à pesquisa qualitativa. Destaca-se que as atividades propostas foram realizadas em grupos, para que os estudantes socializassem e discutissem suas ideias, formas e descrevessem as conjecturas da resolução. Para a elaboração das atividades, foram utilizadas as quatro concepções de Usiskin (1995). Na coleta de dados, foram usados: diário de campo do professor e dos alunos, gravadores e registros por meio de fotografias. O trabalho foi embasado em estudos sobre tarefas investigativas de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), Lamonato e Passos (2011), entre outros pensadores. No que se refere ao estudo da álgebra, a pesquisadora utilizou as ideias de Usiskin (1995), Ponte, Branco e Matos (2009), dos PCN(s), entre outros autores.

Com base nas ideias dos pesquisadores citados, Maccali (2017) salienta que as tarefas de Investigação Matemática proporcionaram aos estudantes momentos de autonomia, instigando-os a pensar e a discutir sobre as distintas estratégias e conjecturas. Ademais, relata que a maioria das atividades foi realizada por meio de materiais concretos, desenhos, cálculos e de algumas fórmulas, enfatizando a importância do trabalho cooperativo na realização das tarefas. A pesquisadora ressalta também que a maioria dos assuntos abordados não era de conhecimento dos alunos dos dois níveis de escolaridade; porém, com as atividades oportunizadas, eles conseguiram aprender diferentes conteúdos. Ainda, de acordo com a pesquisadora, durante a prática pedagógica, foi possível perceber que os alunos gostam de ser desafiados por meio de atividades investigativas.

Já na dissertação de Mariani (2018), intitulada “Cartografia e Investigação Matemática:

possibilidades para uma intervenção pedagógica com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental”, o objetivo foi investigar como os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da Educação Básica do município de Teutônia, no Vale do Taquari, operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo cartografia. Para isso, analisou as estratégias dos discentes ao resolverem e explorarem atividades matemáticas, utilizando a metodologia de Investigação Matemática. Além disso, envolvendo cartografia, identificou regras utilizadas por eles e estimulou a cultura da escrita nas aulas de matemática.

Nos referenciais teóricos, o autor apresenta uma reflexão dos PCN(s) acerca da metodologia utilizada em sala de aula e sobre cartografia. Referente à investigação em sala de aula, apoiou-se nos pressupostos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) e Skovsmose (2000). Pensadores como Cândido (2001), Oliveira (1993), Tostes (2006), Anderson e Ribeiro (1982), Joly (1990), entre outros foram usados como suporte para o referencial sobre Cartografia e Investigação Matemática.

Para a coleta de dados, o pesquisador utilizou filmagem, gravador de voz, o diário de pesquisa de cada aluno, além das suas anotações e observações de fatos relevantes evidenciados nos momentos em que acompanhava os grupos, questionando e procurando compreender o raciocínio dos discentes. O pesquisador buscou propor tarefas que permitissem desafiar os alunos, para que não utilizassem apenas a aplicação de fórmulas, mas que também fossem levados a pensar e a elaborar suas próprias conjecturas, discutindo-as em grupo e reformulando-as, quando necessário.

O autor acredita que a cartografia contribuiu para a aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos, uma vez que despertou nos aprendizes a motivação para que verificassem a necessidade da Investigação Matemática em busca de diferentes técnicas para a solução dos problemas. No início das atividades, Mariani (2018) percebeu que os estudantes apresentavam dificuldades em escrever no diário as estratégias pensadas e discutidas no grupo, pois não estavam familiarizados com essa metodologia. Essas dificuldades, porém, foram sendo superadas no transcorrer das tarefas e, à medida que se acostumavam, começaram a escrever sobre as conjecturas. O autor acredita que, ao desenvolver atividades de Investigação Matemática, é imprescindível controlar o tempo, principalmente, quando os discentes não estão acostumados a esse tipo de tarefa, já que o fazer matemático, de acordo com Mariani (2018), exige pensar, socializar ideias, formular soluções, em vez de apenas expor as ideias através de fórmulas e cálculos prontos.

O trabalho intitulado, “Geometria nos anos iniciais: uma proposta de formação de professores em cenários para investigação”, de Rabaiolli (2013), teve como foco principal problematizar o ensino de Geometria nos anos iniciais através de cenários para a investigação. A autora procurou analisar as concepções dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola na cidade de Lajeado/RS, com foco no estudo de Geometria, bem como organizar e desenvolver estratégias de formação de cenários para a investigação na Geometria nos anos iniciais, a fim de buscar uma educação matemática mais crítica.

Na referida pesquisa, os caminhos metodológicos desenvolvidos na prática investigativa foram de caráter qualitativo. O instrumento inicial utilizado foi uma entrevista individual semiestruturada com professores da Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental e com a coordenadora pedagógica. As tarefas elaboradas tiveram o intuito de abordar o estudo da Geometria a partir de lentes teóricas críticas, a fim de influenciar o pensar de novas práticas e permitir a criação de um cenário investigativo produtivo.

Segundo a autora, os professores destacaram a importância de uma matemática mais crítica, que construa com os alunos os conceitos, dando-lhes a oportunidade de pensar, de pesquisar e de investigar. Os docentes que participaram das atividades da pesquisadora também relataram que, durante e após as atividades desenvolvidas, sentiram-se mais seguros, principalmente, em relação ao conteúdo de Geometria, anteriormente trabalhado.

A dissertação de Pereira (2015), com o título, “Investigação Matemática: possibilidade para ensino de trigonometria”, teve como objetivo principal investigar conjecturas que emergiram de um grupo de alunos de Licenciatura, envolvidos em tarefas investigativas que abrangiam alguns conceitos de trigonometria. O autor procurou elaborar e explorar tarefas investigativas que instigassem alunos de Licenciatura em Matemática à construção de significados de alguns conceitos trigonométricos, estimulando-os a elaborar e a analisar conjecturas, fomentando assim a capacidade da escrita matemática.

Essa pesquisa justificou-se em função de dificuldades dos alunos de Licenciatura em Matemática no decorrer do curso, principalmente, nas disciplinas que exigem conhecimentos trigonométricos. O trabalho teve como base metodológica a pesquisa qualitativa, envolvendo discentes do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, Campus VII – Conceição do Araguaia – PA. Foram utilizados na pesquisa, diário de campo, questionários, gravações em áudio e vídeo e registros escritos produzidos pelo público-

alvo do estudo.

A dissertação teve como fundamento teórico os estudos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013); de Oliveira, Segurado e Ponte (1996); de Fonseca, Brunheira e Ponte (1999); Ponte (2003). Todos eles apontam a Investigação Matemática como tendência metodológica capaz de contribuir para a melhoria do ensino de diversos conteúdos matemáticos, inclusive, da trigonometria. Para Pereira (2015), as tarefas envolvendo a metodologia da Investigação Matemática enfatizam os processos matemáticos (formular, testar, justificar e provar conjecturas), fazendo com que essa intervenção pedagógica proporcione uma nova interação entre o aluno e a disciplina.

Segundo Pereira (2015), uma das dificuldades encontradas na realização da pesquisa foi elaborar as tarefas investigativas, pois tinha o costume de trabalhar atividades e problemas “fechados”. O autor destaca que os alunos, no início, estranharam essa metodologia, mas foram, aos poucos, se desprendendo do modo como conheciam os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, passando a desempenhar um papel de protagonistas de sua própria aprendizagem e a desenvolver novas capacidades matemáticas. A partir dessa experiência com tarefas envolvendo a metodologia de Investigação Matemática, Pereira (2015, p. 126) afirma que “ensinar é mais do que demonstrar para os alunos, meu domínio do conteúdo, é possibilitar que eles aprendam como sujeitos a gostar do estudo por meio de uma inquietação reflexiva constante”.

Também foram buscados, no portal da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), de anos anteriores, até 2019, conhecimentos e contribuições em trabalhos de conclusão de pós-graduação que dissertassem sobre “Investigação Matemática” e/ou “Geometria nos anos Iniciais do Ensino Fundamental”, pois o foco desta pesquisa é Investigação Matemática, abrangendo o estudo da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foram encontradas 45 dissertações que envolvem o tema selecionado; porém, nem todas vinham ao encontro do que esta pesquisa se propõe a estudar. Dessa maneira, após a leitura e a análise, foram selecionadas apenas duas dissertações. A primeira é de Maria Gorete Nascimento Brum (2012), intitulada, “Atividades Investigativas para o Ensino de Matemática para alunos de 5º Série do Ensino Fundamental”, do Centro Universitário Franciscano – UNIFRA. Já a segunda é de Kênia Bomtempo (2009), com o título, “Pequeno Construtor: Cenário de Investigação para o Estudo da Geometria”, realizada na Universidade Federal de Goiás – UFG.

Brum (2012) desenvolveu sua pesquisa numa turma de 5ª série do Ensino Fundamental. Ao realizar a investigação, a autora teve como propósito analisar as contribuições da utilização de atividades investigativas na exploração de padrões e regularidades em sequências numéricas e geométricas como elementos facilitadores da aprendizagem dos alunos da 5ª série. Por meio de uma abordagem qualitativa, a pesquisadora buscou examinar se as atividades de Investigação Matemática favorecem a construção de conceitos de números pares, ímpares, múltiplos, potenciação, perímetro e área de figuras planas e se os alunos estabelecem relações entre as representações geométricas e as expressões algébricas. Durante o estudo, a pesquisadora procurou abandonar a prática de exercícios repetitivos e optou por atividades nas quais os discentes precisassem construir, descobrir, argumentar e participar da construção do conhecimento.

A autora relata que, nas primeiras tarefas sobre “Investigação Matemática”, os alunos apresentaram dificuldades para entendê-las, pois não estavam acostumados a esse tipo de tarefa e esperavam que a professora mostrasse um exemplo. Devido a essa dificuldade, a pesquisadora começou a indagá-los, a questioná-los, a provocá-los e, aos poucos, os alunos foram compreendendo e se habituando à nova metodologia. Por fim, estavam envolvidos e empenhados na busca de soluções para as atividades. Brum (2012) ressalta que, durante a realização do trabalho, houve troca mútua, interação entre professor e aluno e reforça as colocações de Alro e Skovsmose (2010), que afirmam que o professor precisa desafiar seus alunos, mas também precisa estar preparado para ser desafiado.

Bomtempo (2009), em sua pesquisa de mestrado, investigou as possibilidades de a construção de miniaturas de casas serem cenários para investigação e para o estudo da Geometria. O trabalho foi desenvolvido por meio do projeto, “Vivenciando a Matemática”, no qual foram desenvolvidas tarefas para esclarecer dúvidas em matemática com alunos do 5º e 6º ano do Ensino Fundamental.

Para realizar a pesquisa, a autora baseou-se em referenciais teóricos como Alro e Skovsmose (2006), os quais relatam que, quando usamos “cenários de investigação”, os alunos tornam-se participantes críticos e ativos do processo de investigação. No decorrer da dissertação, as análises apontaram as fragilidades da professora e dos alunos, bem como, a efemeridade dos cenários para investigação e, ao mesmo tempo, possibilitaram repensar as aulas de Geometria nos anos iniciais. Bomtempo (2009) acrescenta que a metodologia usada faz com que professor e alunos tenham relação de parceria na busca de soluções e respostas

para seus questionamentos, compartilhando descobertas, além de proporcionar a construção do próprio conhecimento, tornando-se críticos e com capacidade de argumentação em relação aos conceitos científicos da Geometria.

A partir da análise dos estudos evidenciados, verificou-se que as dissertações que abordam a Investigação Matemática têm como base metodológica a pesquisa qualitativa. Além disso, os estudos realizados ressaltam a importância de tarefas que envolvam Investigação Matemática, pois proporcionam a autonomia do estudante, possibilitando-lhe maior liberdade para seguir o próprio caminho em busca de soluções para as situações propostas. Ademais, esse tipo de tarefa instiga os alunos, fazendo-os pensar, o que acarreta a construção de conjecturas, discutindo-as em grupo e reformulando-as, quando necessário.

As questões investigativas, de acordo com os trabalhos anteriormente apresentados, viabilizam aos estudantes o desenvolvimento do espírito investigativo, oferecem ambiente de interação e troca, estimulam a cultura da escrita em matemática e oportunizam aos alunos momentos de investigação, pesquisa, testagem e justificativa das respostas. Outro fator encontrado nas pesquisas analisadas é o papel fundamental do professor que, ao tentar novas metodologias, modifica sua prática e sua postura em sala de aula, saindo da “zona de conforto” para inovar na prática pedagógica. A maioria dos estudos destacou as dificuldades dos discentes em adaptar-se à metodologia de Investigação Matemática, infortúnios que, aos poucos, foram superados. Destaco ainda que a leitura e a análise dessas dissertações ampliaram a compreensão de alguns conceitos pesquisados, referentes à metodologia de Investigação Matemática, bem como sobre o ensino de Geometria.

No próximo capítulo, descrevo os procedimentos metodológicos, o tipo de pesquisa, os discentes com quem foi realizada a intervenção pedagógica, bem como os objetivos e as tarefas investigativas desenvolvidas no decorrer da prática pedagógica.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresento os caminhos metodológicos, organizados em duas seções. Na primeira, caracterizo a pesquisa qualitativa, bem como descrevo cada instrumento utilizado na coleta de dados. Na segunda seção, apresento detalhadamente informações sobre a realização da prática pedagógica.

3.1 Sobre a Pesquisa

De acordo com Fazenda (2015, p. 78), “a pesquisa é uma abordagem que implica romper hábitos e acomodações e nos desaloja de posições confortáveis, provocando mudanças, permitindo a produção de saberes”. Ainda, de acordo com a autora citada, é por meio da pesquisa que se busca um agir comunicativo, já que é uma forma de investigação que utiliza técnicas para contribuir e melhorar a prática reflexiva quando esta torna-se rotineira, ou seja, cai no automatismo. Schneider (1997, p. 55) acrescenta que a pesquisa é uma atividade voltada à solução de problemas e completa dizendo que

[...] é a pesquisa que oferece a possibilidade de novas descobertas e proporciona o intercâmbio com outras áreas. A excelência da ciência dá-se através da pesquisa. É graças à pesquisa que surge a possibilidade do novo. Onde não há pesquisa, somente se reproduz. Enquanto a tônica for a reprodução, o acadêmico se preocupará apenas com a decoreba.

Assim, buscando compreender o fenômeno pesquisado e a análise dos dados coletados, optou-se pela pesquisa qualitativa. Para Moraes e Galiuzzi (2016, p. 33):

Pesquisas qualitativas têm se utilizado cada vez mais de análises textuais. Seja partindo de textos existentes, seja produzindo o material de análise a partir de entrevistas e observações, a pesquisa qualitativa pretende chegar a interpretar os fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação.

Desta forma, a presente pesquisa caracteriza-se como qualitativa, por haver uma relação dinâmica entre o mundo do sujeito e o mundo real, impossível de ser traduzida em números; por não utilizar métodos estatísticos, sendo os dados analisados indutivamente. De acordo com Silva e Menezes (2001), a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são consideradas procedimentos básicos no processo de pesquisa qualitativa.

Ainda em relação à pesquisa qualitativa, Bicudo (2012) explica que ela “trabalha com a qualidade”, ou seja, “a qualidade é do objeto e passível de ser observada” (BICUDO, 2012, p. 17). Segundo a autora, na pesquisa qualitativa, observa-se o sujeito para verificar seus comportamentos, para que se possa interpretar estes dados na perspectiva de teorias que estejam relacionadas com o que está sendo pesquisado. Ademais, a pesquisa qualitativa permite desenvolver hábitos de ação, visando ao crescimento, à autonomia e à criatividade. O foco desse tipo de pesquisa é ver o indivíduo não como objeto, mas como sujeito do conhecimento e da história. Enfatizando mais o processo que o produto, ela preocupa-se em retratar a perspectiva dos participantes (FAZENDA, 2015).

Este estudo apresenta características de pesquisa qualitativa, pois analisei estratégias e conjecturas elaboradas pelos discentes, por meio de diários de campo, resolução de tarefas, observações, questionários, gravação de voz e filmagens. Além disso, considerei o aluno como sujeito ativo, analisando as estratégias e conjecturas elaboradas na resolução das tarefas propostas.

Os instrumentos utilizados nesta pesquisa, como o diário de campo, serviu para os grupos transcreverem as resoluções de cada tarefa proposta, as conjecturas e percepções no decorrer da pesquisa. A professora/pesquisadora também relatava no seu diário de campo, fatos importantes observados, para, posteriormente, analisá-los. Em cada encontro, os grupos preenchiam o diário de campo com anotações, ou seja, descreviam como realizaram a tarefa proposta, bem como as conjecturas e estratégias encontradas para desenvolverem as tarefas. No final de cada encontro, recolhia o diário de campo para posterior análise.

De acordo com Souza (2014), o diário de campo é um instrumento de registro de dados que permite sistematizar as experiências, para depois analisar os resultados. Nele podem ser relatadas observações, pensamentos, reflexões e perspectivas argumentativas dos discentes. Os registros no diário de campo durante a realização das atividades podem ser entendidos como um momento de investigação, portanto, de pesquisa, pois, de acordo com a Base Nacional

Comum Curricular do Ensino Fundamental, desde os anos iniciais, o ensino

[...] deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (BRASIL, 2018, p. 266).

O registro escrito numa investigação é uma representação que os alunos raramente utilizam nessa faixa etária; contudo, desempenha um papel fundamental; por um lado, possibilita ao professor/pesquisador identificar, analisar as estratégias utilizadas pelos alunos, sua evolução e seu desempenho. Por outro lado, o registro escrito ajuda o aluno a organizar e a construir seu pensamento e a desenvolver sua capacidade de comunicar-se matematicamente (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006).

Durante a prática pedagógica, também foram necessários os instrumentos de gravação de voz e filmagens. De acordo com Peter Loizos (2008, p. 149), o registro em vídeo é necessário “sempre que algum conjunto de ações humanas é complexo e difícil de ser descrito compreensivamente por um único observador”. Para Honorato *et al.* (2006), a captação de imagens em vídeo é uma rica fonte de elementos, especialmente, em pesquisas com crianças; “afinal, como registrar tantos meandros, tantos detalhes, tantas relações para depois debruçar-se sobre? Há ditos que não são pronunciados oralmente; ditos que não são captados por um gravador e acabam perdidos sem um registro [...]” (p. 6). De acordo com a autora, o som e as imagens em movimento integrados podem ajudar a desvendar a complexa rede de produção de significados e sentidos manifestados por palavras, gestos e relações, a compreender as culturas infantis e a captar a essência das narrativas.

Cabe enfatizar que, em cada encontro, foi exposto um gravador de voz em cada grupo e uma filmadora na sala de aula, centralizando o grande grupo. Findas as tarefas, os instrumentos eram recolhidos para análise. Acredito que as filmagens e os gravadores de voz foram importantes, pois nem sempre conseguia observar o trabalho de todos os grupos ao mesmo tempo. Com o auxílio desses instrumentos, pude analisar detalhadamente as estratégias utilizadas pelos grupos, como também procurei observar reações, percepções, comportamentos e interações de cada aluno durante a realização das tarefas.

Para concretizar a análise dos dados, utilizei a análise descritiva, que consiste na descrição de características de determinados fenômenos. Ademais, a análise descritiva “descreve o comportamento dos fenômenos, estabelece relações entre as variáveis e possibilita ao investigador maximizar seu conhecimento acerca de um determinado fenômeno” (GIL, 2008, p. 28). Nesse sentido, ao realizar a prática pedagógica, analisei cada tarefa, descrevendo todas as estratégias e conjecturas elaboradas pelos alunos, assim como discussões, debates e conclusões. A análise das observações da prática pedagógica, bem como o material da coleta de dados estão interligados com o referencial teórico estudado nesta dissertação.

Convém ressaltar que, antes de iniciar a prática pedagógica, solicitei anuência para usar o nome da escola, como também o consentimento para realizar a investigação que constou de uma prática pedagógica com os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (APÊNDICE A). Também encaminhei aos responsáveis dos alunos da turma do 5º ano, um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE B), solicitando a autorização de uso da imagem e da voz dos participantes da pesquisa. Este Termo foi preenchido e assinado pelo responsável do participante.

3.2 Sobre a Prática Pedagógica

Esta pesquisa foi desenvolvida com estudantes do Ensino Fundamental da Escola Municipal Heitor Villa-Lobos³, do município de Coqueiro Baixo, Vale do Taquari/RS. Destaco que, numa reunião realizada formalmente com a direção da escola, quando foi feita a apresentação e o detalhamento da proposta pedagógica desenvolvida com a turma do 5º ano do Ensino Fundamental do turno da tarde da referida escola da rede pública municipal, a direção assinou o termo de consentimento para utilização e exposição do nome da escola durante a realização do estudo, bem como para a realização da prática pedagógica com a turma do 5º ano do Ensino Fundamental, conforme o apêndice A. Cabe ressaltar que realizei a prática pedagógica na escola onde atuo como docente, com alunos que já conheço, pois fui titular da turma. Porém, no período da prática pedagógica referente a esta dissertação, havia outra professora responsável pela turma do 5º ano, devido à minha licença maternidade, no entanto

³ A escola Municipal Heitor Villa-Lobos, localiza-se no centro do município de Coqueiro Baixo, agregando 93 alunos do 1º ao 9º. A escola possui 5 salas de aula, um refeitório, uma sala de informática, um laboratório de ciências, um laboratório de informática, sala de jogos, sala de professores, de direção, sala de recursos humanos, secretaria, cozinha, uma cancha de esporte, uma cancha de areia, pracinha, banheiros e um belo pátio.

neste período, realizei a prática pedagógica referente a esta dissertação com a turma do 5º ano, totalizando 8 encontros.

A instituição distribui a carga horária em horas-aula por disciplina. A disciplina de Matemática tem quatro horas-aula semanais: duas, na segunda-feira e duas, na quinta-feira. A prática teve duração aproximada de 16 horas-aula. A turma era composta por 7 alunos, 5 meninas e 2 meninos, na faixa etária entre 9 e 10 anos. O objetivo da proposta foi analisar as conjecturas e estratégias utilizadas na execução de tarefas fundamentadas na metodologia da Investigação Matemática, com foco em Geometria.

Na apresentação das tarefas investigativas abordando o tema Geometria, foram expostos os objetivos específicos de acordo com o conteúdo desenvolvido na tarefa planejada, com base nas determinações da BNCC. Todas eram relacionadas à metodologia de Investigação Matemática e foram exploradas em grupo, seguindo a sequência das aulas de acordo com o horário da escola. Em cada encontro os grupos foram organizados de formas diferentes, por afinidade, sorteio e sob minha orientação, bem como incentivados a todo momento a explorarem as questões, a fim de desenvolverem a criatividade e a capacidade de pensar e de agir com autonomia, ao construírem suas próprias conjecturas e ao apresentá-las de forma oral e escrita aos colegas da turma, comparando as descobertas.

As tarefas de investigação foram realizadas em grupos, com o objetivo de proporcionar momentos de socialização, de aprendizagem e de troca de saberes. Os alunos exploraram as tarefas, seguindo as orientações dos enunciados. Formularam suas conjecturas e estratégias em cada tarefa realizada, relatando-as por escrito. Em seguida, essas hipóteses foram testadas e, em alguns casos, reformuladas. Por fim, os alunos registraram por escrito suas hipóteses e socializaram suas descobertas com os demais colegas.

Com base na nova estrutura da BNCC (BRASIL, 2018), foram explorados alguns conceitos no decorrer das tarefas investigativas, nesta prática pedagógica. Destaco entre eles, na primeira tarefa prática, o reconhecimento das faces, das arestas e dos vértices nas figuras geométricas espaciais, retomando os conceitos que compõem os sólidos geométricos. Na segunda tarefa, o estudo de figuras geométricas espaciais, objetivando o reconhecimento das faces, arestas e vértices, as representações, planificações e características, associando-os à ideia de volume. Na terceira, abordei a localização e a movimentação: pontos de referência, direção e sentido, visando que o discente descrevesse deslocamentos e localização de pessoas e de

objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, além do uso de termos como direita e esquerda, mudanças de direção e de sentido.

Na quarta tarefa, o foco foi o estudo dos polígonos considerando os lados e os ângulos retos e não retos, envolvendo o uso de dobraduras e esquadro, além de explorar reflexões sobre simetria. O objetivo era que os alunos utilizassem técnicas para construir figuras por meio de dobraduras e corte, reconhecendo-os, nomeando-os, fazendo comparações considerando os lados e os ângulos. Já na quinta tarefa, pautei a construção de polígonos, explorando conceitos de área, perímetro, nomenclatura dos polígonos de acordo com o número de lados. Analisei as estratégias dos discentes para construir as figuras, medir e comparar comprimentos e estimar áreas.

Na sexta tarefa, enfatizei o estudo de perímetros e áreas, por meio de uma sequência organizada pelos discentes, com o objetivo de analisar e verificar que figuras de perímetros diferentes podem ter áreas iguais, bem como que figuras de áreas diferentes podem ter perímetros iguais. Na sétima, envolvi os polígonos irregulares com objetos da natureza, a fim de verificar as estratégias utilizadas pelos alunos para calcular a área e o perímetro.

As tarefas realizadas nesta prática pedagógica, que abrangem o estudo da Geometria na turma do 5º ano do Ensino Fundamental, corroboram a Base Nacional Comum Curricular, a qual, especifica que, nos anos iniciais do Ensino Fundamental,

[...] espera-se que os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, *tablets* ou *smartphones*), croquis e outras representações. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de Geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 271).

Como se pode perceber, o trabalho com noções geométricas expressa elementos necessários para a formação do aluno, para a compreensão do espaço com suas dimensões e formas de constituição. Desta forma, o aluno consegue desenvolver um pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada e concisa, o mundo em que vive.

No Quadro 4, apresento os objetivos e as atividades exploradas no decorrer da prática

pedagógica. Saliento que, para cada tarefa, foram atribuídos objetivos específicos de acordo com os conteúdos trabalhados, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Quadro 4 – Objetivos e tarefas desenvolvidas por encontros

Encontros	Horas/Aula (55 minutos cada)	Objetivos	Tarefa desenvolvida
1° e 2°	Quatro horas/aula	Reconhecer nas figuras geométricas espaciais, as faces, as arestas e os vértices. Retomar os conceitos dos elementos que compõem os sólidos geométricos.	Utilizando os cubinhos disponibilizados, formar um cubo. Colorir as 4 faces do cubo, após realizar uma análise, de acordo com a quantidade de cubinhos que foram coloridos.
3°	Duas horas/aula	Associar a ideia que os cubinhos representam o volume do cubo. Associar figuras espaciais a suas planificações; analisar, nomear e comparar seus atributos.	Continuação de sequência de figuras, analisando quantos cubinhos são necessários para formar as próximas figuras. Planificação de figuras.
4°	Duas horas/aulas	Descrever o deslocamento e a localização de pessoas no espaço.	Auxílio a uma pessoa para deslocar-se da saída da sala de aula até a prefeitura municipal de Coqueiro Baixo.
5°	Duas horas/aulas	Estudar os polígonos considerando os lados. Construir diferentes formatos de triângulos, por meio de dobraduras e cortes. Reconhecer ângulos retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras.	Construção de figuras por meio de dobraduras, encontrando uma relação entre o número de lados da figura e o número de dobragens.
6°	Duas horas/aulas	Reconhecer e nomear os polígonos considerando os lados. Medir e estimar comprimentos, incluindo cálculo de perímetros e áreas de figuras planas.	Identificação de figuras geométricas planas, nomeando-as de acordo com os lados e cálculo de área e perímetro.
7°	Duas horas/aulas	Calcular áreas e perímetros de figuras planas irregulares.	Cálculo do perímetro e da área de uma folha de uma árvore.
8°	Duas horas/aulas	Comparar figuras que possuem a mesma área, mas podem ter perímetros diferentes e vice-versa.	Sequência de figuras, realizando e comparando os cálculos de áreas e perímetros.

Fonte: Da autora (2020).

No primeiro encontro, expliquei aos estudantes o que são tarefas investigativas e a forma de realizá-las, bem como apresentei os objetivos destas tarefas, envolvendo Investigação Matemática. Enfatizei que estavam vinculadas a um estudo, ou seja, a uma pesquisa que estava realizando, ligada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari - Univates.

Ressaltei, também, que as tarefas a serem realizadas no decorrer dos encontros seriam em grupo. Salientei a importância do trabalho em grupo, do trabalho cooperativo, como uma forma diferenciada de trabalhar em sala de aula, especificamente, quando as tarefas envolvem formulações de conjecturas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 30) acrescentam que:

A situação do trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa, o que numa fase inicial pode ser complicado em termos de autogestão do grupo. Muitas vezes, um ou dois alunos tomam a liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideias, facilitando assim, o trabalho conjunto.

Outrossim, considerando as reflexões dos autores, o trabalho em grupo potencializa o envolvimento de todos, possibilitando momentos de discussões nos quais um aluno pode auxiliar outro que possui dificuldades, enriquecendo assim sua aprendizagem. Nesse sentido, para uma melhor organização dos trabalhos realizados em grupos, nesta prática pedagógica, em cada tarefa, atribuí nomes diferentes aos grupos. Na primeira tarefa, nomeei os grupos de A1, A2 e A3. Os estudantes também receberam nomes, ou seja, em todas as tarefas foram designados com as mesmas letras do alfabeto: N, M, D, S, E, L e P.

No início de cada encontro, cada grupo recebia um diário de campo. Ressaltei a importância de descreverem “detalhadamente” todas as estratégias utilizadas e as conjecturas elaboradas em cada tarefa, no diário. Posteriormente, os diários de campo foram recolhidos e analisados. Também, em cada encontro, cada aluno recebia uma folha com a tarefa proposta, que, após ser concluída, era anexada no caderno. Durante a realização das tarefas propostas, passava nos grupos, fazia questionamentos para obter resultados mais precisos e detalhados. Ao final de cada encontro, reservava um espaço para que cada grupo expusesse para a turma as estratégias utilizadas durante a exploração das atividades.

No próximo capítulo, descrevo a condução dos oito encontros, as tarefas desenvolvidas, a reação dos alunos diante as tarefas propostas, suas manifestações e colaborações, a análise dos resultados emergentes de cada encontro realizado.

4 ANÁLISE DOS DADOS EMERGENTES DAS TAREFAS INVESTIGATIVAS

Neste capítulo, detalho e discuto os resultados decorrentes da prática pedagógica, destacando as estratégias/conjecturas dos estudantes durante o desenvolvimento das tarefas, envolvendo a metodologia de Investigação Matemática. Apresento a discussão dos dados, por tarefa realizada, imbricando a análise com ideias de autores que embasaram a elaboração desta prática pedagógica. Destaco que os dados são oriundos das filmagens e da gravação de voz utilizadas no decorrer da realização das tarefas, bem como das observações descritas no meu diário e no dos alunos, como também, nas resoluções das tarefas, registradas em folhas.

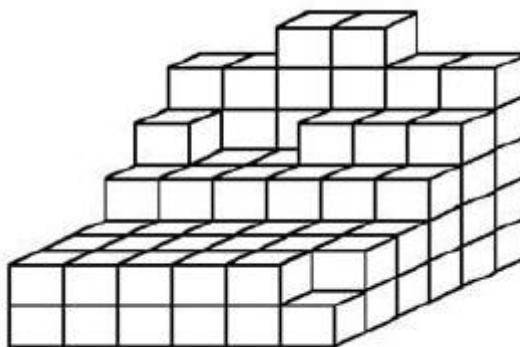
4.1 Tarefa 1: construção de cubos

Esta tarefa foi realizada em dois encontros. Conforme já mencionado, analisei os dados de cada encontro. Por ser o primeiro contato com a Metodologia de Investigação, os alunos sentiram-se desconfortáveis, inseguros, levando um tempo maior para elaborar as conjecturas.

4.1.1 Primeiro encontro

A primeira tarefa tinha o intuito de reconhecer as figuras geométricas espaciais, em especial o cubo, retomar a definição e os conceitos dos elementos que compõem o cubo, como: as arestas, os vértices e as faces. Na sequência, solicitei que os estudantes formassem duas duplas e um trio, de acordo com a afinidade. Os grupos foram nomeados como: A1, A2 e A3. No Quadro 5, apresento a referida tarefa:

Quadro 5 – Tarefa 1: O cubo



Atividade 1: João quer formar um cubo, mas, como acabaram os cubinhos, a figura ficou incompleta, como mostra a imagem. Assim, João precisa organizar os cubinhos de forma diferente para formar um cubo.

a) Ajudar o João a formar um cubo, utilizando os cubinhos disponibilizados.

b) Colorir as 6 faces dos cubos construídos.

c) Observar e responder: Quantos cubinhos foram coloridos com:

- uma face:

- duas faces:

- três faces:

- nenhuma face colorida:

d) Comentar os resultados em uma tabela, identificando relações/conclusões/generalizações.

Fonte: Adaptação de Carvalho e Pitombeira (2010, p. 147).

Enquanto apresentava a primeira tarefa, também fiz a leitura dela, pois Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 26) salientam que “o professor tem que garantir que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade. O cuidado posto nesses momentos iniciais têm especial relevância quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com as investigações”.

Após a leitura do enunciado, discuti com os estudantes o que era um cubo, o que era aresta, vértice, face. Conceituando, que o cubo é um poliedro, um sólido geométrico, com 6 faces congruentes de forma quadrada. As explicações foram dadas, mostrando-se várias imagens que representam o cubo, como, por exemplo: um dado, o cubo mágico, além de usar o material dourado (utilizando o cubo formado por mil cubinhos). Na oportunidade, expliquei que os lados do cubo eram as faces, que a junção de duas faces forma a aresta e o encontro de três arestas formam os vértices.

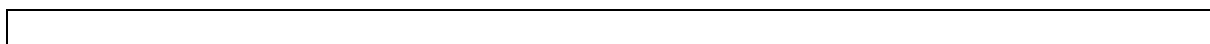
Para auxiliá-los na interpretação e na resolução da tarefa 1, letra “a”, sentamos no chão

e juntos construímos a figura do exercício, com o auxílio dos cubinhos do material dourado. Questionei quantos cubinhos o Joãozinho do exercício recebeu. Para descobrir a quantidade de cubinhos, os alunos começaram contando de um em um. Alguns pararam de contar, pois se perderam na contagem; apenas dois encontraram o número correto de cubinhos. Neste momento, sem dar o valor da quantidade de cubinhos, questionei se havia outro jeito de contar os cubinhos. Os estudantes se olharam timidamente. Um deles observou que era possível contar de 6 em 6, na base da figura. Também poderia ser realizada essa contagem de 6 em 6 cubinhos na segunda camada e descontar um. Nas demais camadas, contar de 6 em 6 ou por unidades. Adicionando os valores de cada camada da figura, eles encontraram 107 cubinhos. A partir desta construção coletiva e da contagem dos cubinhos, cada grupo recebeu a mesma quantidade de cubinhos, ou seja, 107 cubinhos, para resolver a questão ‘a’ do exercício, que era: “Ajudar o João a formar um cubo, utilizando os cubinhos disponibilizados”.

Iniciando a construção do cubo, os grupos A1 e A2 construíram um cubo com a base de 6 cubinhos. O grupo A3 fez um cubo com a base de 10 cubinhos. Questionei o grupo A1 se teriam cubinhos suficientes para realizar a construção. Eles responderam que não sabiam. Solicitei que relesem o enunciado do exercício e observassem a figura representada na tarefa. Deixei que continuassem a construção. Quando estavam construindo a terceira camada, o aluno M percebeu que não havia cubinhos suficientes e descobriu que teriam que começar com menos cubinhos na base.

Perguntei se teriam cubinhos suficientes para fazer um cubo com base de 5 cubinhos. Solicitei que analisassem quantos cubinhos seriam necessários para construir um cubo de aresta 5. O aluno L interferiu comentando que, na primeira camada, seriam necessários 25 cubinhos e nas demais também. Foi somando camada por camada até chegar em 125 cubinhos e concluiu que não seria possível, pois o grupo não possuía cubinhos suficientes. Então, fizeram o cálculo para um cubo com a base de 4 cubinhos. Perceberam que teriam cubinhos suficientes, pois colocariam 16 cubinhos na base, o que se repetiria nas outras 3 camadas. Somando $16 + 16 + 16 + 16$, o total seria 64 cubinhos. O grupo concluiu que seria possível construir um cubo com aresta de 4 cubinhos, porém sobriam 43. Assim, indagaram se era possível sobrar cubinhos. Sendo a resposta positiva, começaram a construir um cubo com base de 4 cubinhos, conforme está representado na Figura 1.

Figura 1 – Grupo A1 formulando estratégias para resolver a tarefa 1





Fonte: Estudantes do grupo A1.

Somente nesta fase, o grupo A1 compreendeu a lógica da tarefa, qual era realmente o objetivo proposto. Percebi que o grupo estava com dificuldades de elaborar suas conjecturas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 30) salientam que:

A exploração inicial da situação é uma etapa na qual os alunos, muitas vezes, precisam gastar algum tempo. Aos olhos do professor, porém, pode parecer que nada está acontecendo e que os alunos estão com dificuldades quanto a essa atividade. No entanto, essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas. É nessa fase que se vão embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa.

De acordo com os autores citados, as tarefas de Investigação Matemática geram um certo desconforto aos estudantes, que ficam confusos, pois não estão habituados a esta metodologia. Então, cabe ao professor, procurar criar um ambiente em que o aluno sinta-se à vontade, oportunizando-lhe tempo para que possa pensar, explorar suas ideias e compartilhá-las com os colegas de grupo. Os estudantes devem saber que podem contar com o apoio do professor, porém a tarefa depende de sua própria iniciativa.

O grupo A3 iniciou o cubo com a base de 10 cubinhos. Já na construção da base perceberam que não teriam cubinhos suficientes. Fazendo os cálculos, descobriram que, em cada camada, seriam necessários 100 cubinhos. Foram adicionando de 100 em 100 e concluíram que seriam necessários 1000 cubinhos para fazer o cubo de base 10, também, questionaram se poderiam sobrar cubinhos. Como a resposta foi positiva, confeccionaram um cubo com base de

3 cubinhos. Depois, com os demais cubinhos que sobraram construíram cubos com base de 2 cubinhos. Na Figura 2, os alunos deste grupo construindo os cubos.

Figura 2 – Alunos do grupo A3 formulando suas conjecturas para resolver a tarefa 1



Fonte: Integrantes do grupo A3.

O grupo A3 também teve dificuldades para iniciar a tarefa, pois procuravam um caminho pronto. Foi preciso testar a hipótese da aresta com 10 cubinhos para compreender que não era possível realizar a tarefa com essa quantidade de cubinhos. Somente depois do teste, perceberam que o cubo deveria ter uma aresta menor que 6 cubinhos.

Com o grupo A2, não foi diferente. Ao perceberem que não mostraria um caminho a ser seguido, iniciaram a construção com 6 cubinhos de aresta. Foram construindo até terminarem os cubinhos. Ao verificarem que os cubinhos disponibilizados não seriam suficientes, construíram o cubo com a base de 5 cubinhos. Questionei se teriam cubinhos suficientes. Eles comentaram que não sabiam e continuaram a construção até descobrirem que a quantidade de cubinhos não era suficiente. Ao finalizarem a construção, faltavam cubinhos para formar um cubo de aresta 5. Solicitei ao grupo que não destruísse a construção e convidei os demais grupos para socializarem as resoluções. Foi então que um componente deste grupo relatou o ocorrido, como podemos observar no diálogo⁴ a seguir:

⁴ Os diálogos durante as tarefas serão destacados com recuo de 3 cm, formato itálico, e o espaçamento entre linhas será de 1 cm.

Aluno P: “*Nós começamos construir o cubo com 6 cubinhos na primeira camada. Deu pra fazer a primeira camada, a segunda camada. Para fazer a terceira camada faltou 1 cubinho. Mas era preciso fazer 6 camadas, porque é um cubo. Então percebemos que a gente devia fazer o cubo menor, para ter cubinhos suficientes. Começamos a construir o cubo com 5 cubinhos na base. Conseguimos fazer a primeira, a segunda, a terceira e a quarta camada. Tínhamos que fazer 5 camadas. Mas, também não teve cubinhos suficientes*”.

Pesquisadora⁵: “*Quantos cubinhos faltou?*”

Aluno E (do grupo A3): “*Faltou 18 cubinhos. Porque para fazer o cubo com 5 cubinhos na base, era preciso 125 cubinhos. Porque em cada camada vai 25. E 25 vezes 5, dá 125. Nós também queríamos fazer o cubo com base 5 cubinhos, aí fazendo as continhas percebemos que não teria cubinhos suficientes*”.

Pesquisadora: “*Muito bem, aluno E pela contribuição. Eu percebi que, alguns de vocês começaram a construção do cubo com base 6 cubinhos de aresta e outros com base 10 cubinhos. Ao decorrer da construção vocês perceberam que não seria possível realizá-la, pois faltaria cubinhos. Seria possível descobrir a quantidade de cubinhos necessários, para fazer um cubo, sem realizar a construção dele?*”

Aluno M: “*Sim, calculando quantos cubinhos vai em cada camada. Como, com 6 cubinhos, precisa de 36 em cada camada e são 6 camadas, ao todo precisaria (tempo para realizar o cálculo), 216 cubinhos. Então não seria possível. Primeiro era necessário ver quantos cubinhos iam em cada camada. Para depois multiplicar pelo número de camadas. Assim a gente ia descobrir quantos cubinhos seriam necessários para fazer um cubo*”.

Aluno L: “*Por isso que o Joaozinho da tarefa não conseguiu, porque ele começou com 6 cubinhos na base*”.

Aluno E: “*Com 5 cubinhos também não é suficiente para formar um cubo, pois tem somente 107 cubinhos*”.

Aluno M: “*Então, tem que ser com 4, 3 ou 2 cubinhos na base*”.

Pesquisadora: “*Como você sabe que terá cubinhos suficientes, para construir um cubo de aresta 4*”.

Aluno M: “*Porque na primeira camada são 16 cubinhos, na segunda camada mais 16, vai dar 32 cubinhos, na terceira camada mais 16, dará 48 e na última camada mais 16, vai ser preciso 64 cubinhos*”.

Aluno N: “*E para fazer um cubo de base 3 vão ser preciso 27, porque são $9 + 9 + 9$* ”.

Pesquisadora: “*E quem fez um cubo de base 2, quantos cubinhos utilizou?*”

Aluno E: “*8, porque $4 + 4$* ”.

Durante a socialização, os colegas sugeriram ao grupo A3 que poderiam fazer cubos com a base de 2 cubinhos, ou com a base de 3 cubinhos, ou com a base 4 de cubinhos. Neste momento, o grupo compreendeu o objetivo da tarefa e a lógica da construção de cubos.

Os demais grupos também apresentaram a forma como realizaram a primeira tarefa. Em momento algum, percebi que, no início, um dos grupos tivesse considerado que, com 107 cubinhos, não seria possível construir um cubo com aresta de 6 cubinhos. Somente ao longo da construção, foram descobrindo que não haveria cubinhos suficientes para realizá-la. Ficaram constrangidos e não sabiam o que fazer. Questionando, procurei instigá-los a resolverem a tarefa de outras formas. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 52):

Numa aula com investigações, o professor deve, sem dúvida, privilegiar uma postura interrogativa. As questões que coloca podem, no entanto, assumir diversas formas e

⁵ Sempre que usar os termos: pesquisadora, professora, professora/pesquisadora estou me referindo a minha pessoa (Joseane Marta Vian).

ter objetivos diversos. Muitas vezes, a intenção do professor ao colocar uma questão é, simplesmente, a de clarificar ideias, quer para sua própria compreensão, quer para a de toda turma.

Durante a realização da tarefa, percebi que os alunos estavam tímidos, sentiram-se desconfortáveis, pois, ao serem questionados, olhavam-se e tinham receio de responder, uma vez que estão acostumados com o certo e o errado; se alguém desse uma resposta sem sentido, era motivo de “risadinhas” e “piadinhas”. Também verifiquei que os estudantes estão habituados a seguir uma orientação, um modelo inicial, pois, muitas vezes, ouvi as seguintes frases: “eu não sei como se faz”; “professora, como se faz, me ajuda, dá uma dica, está difícil”. Diante desta inquietação, procurei sentar com cada grupo e dialogar, ajudando-os a resolver as dúvidas por meio de questionamentos. Acredito que a insegurança tenha surgido por tratar-se do primeiro contato com a metodologia de Investigação Matemática. Nesse sentido, corroboram Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 26), que comentam:

Contudo, independentemente do nível etário da classe, há que garantir, nessa fase inicial, que os alunos compreendam o que significa investigar. Para tal têm de entender a natureza desse tipo de tarefa, que se afasta bastante das atividades mais habituais na sala de aula. De fato, aqui o aluno não está perante uma questão bem delimitada a que tem de dar uma resposta, fazendo mais ou menos cálculos, mas tem, ele próprio, de formular as suas questões com base na situação que lhe é apresentada.

Destaco que, para verificar o desempenho e as reações no decorrer das tarefas investigativas, também utilizei a filmagem como instrumento de coleta de dados. Talvez esta seja outra razão que explica a aflição dos alunos, por não estarem familiarizados com gravações e filmagens. Mesmo que lhes assegurasse que apenas eu veria e ouviria as gravações e filmagens, eles procuravam falar baixinho, perto do ouvido do colega, ou seja, cochichavam entre eles. Em virtude das dificuldades que surgiram, não foi possível realizar todos os itens da tarefa programada para o primeiro encontro, apenas a letra “a”. Os demais itens ficaram para o próximo encontro.

4.1.2 Segundo encontro

Neste segundo encontro, foi relembrada a tarefa do encontro anterior. Foram expostos os cubos construídos em aula, bem como um cubo com aresta de 5 cubinhos, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Cubos confeccionados pelos alunos no encontro anterior



Fonte: Alunos do 5º Ano.

Distribuí os cubos aos grupos para realizar as demais tarefas da atividade 1. Para melhor organização, nomeei os grupos de B1, B2 e B3 enquanto os estudantes permaneceram com as mesmas letras do encontro anterior N, M, S, D, E, L e P. Os alunos M e N do grupo B1 analisaram o cubo com aresta 5; L e S do B2 fizeram o estudo do cubo com aresta 4; os integrantes E, D e P, do B3, exploraram os cubos de arestas 1, 2 e 3. Solicitei a leitura coletiva do enunciado da tarefa, pois Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 26) argumentam que, “para alunos mais novos, a leitura conjunta do enunciado poderá ser imprescindível para a sua boa compreensão, nem que seja somente para esclarecer certos termos com que não estão familiarizados”. No Quadro 6, a seguir, está a tarefa solicitada.

Quadro 6 – Continuação da tarefa 1

<p>b) Colorir nas faces do cubo, analisando e registrando o total de cubinhos que podem ser coloridos com:</p> <ul style="list-style-type: none"> - uma face - duas faces - três faces - seis faces - nenhuma face colorida <p>c) Comentar os resultados, em uma tabela, identificando relações/ conclusões/generalizações.</p>
--

Fonte: Adaptação de Carvalho e Pitombeira (2010, p. 147).

Solicitei que cada grupo realizasse a tarefa com base no cubo recebido, para, na sequência, no grande grupo, socializarem as respostas e, a partir delas, construir um quadro para análise. Apesar de a leitura do enunciado ter sido realizada coletivamente, o grupo A3 demonstrou insegurança para começar a colorir. Analisou o cubo de aresta três, mas, com medo de colorir errado, questionaram onde deveriam colorir. Sugeri, então, que, juntos, analisássemos o que era solicitado na tarefa: colorir as faces do cubo. Relembramos o que eram as faces, conforme o seguinte diálogo:

Pesquisadora: “*O que são as faces do cubo? Vocês lembram?*”

Aluno E: “*São os lados do cubo que devemos colorir. (Mostrando com o dedo onde era para ser feita a pintura no cubo de aresta 3)*”.

Pesquisadora: “*Observem neste cubo de aresta 3, que o colega E, possui, como deve ser realizada a pintura? Tem cubinhos que podemos ver três lados?*”

Aluno E: “*Sim, as pontas do cubo*”.

Pesquisadora: “*As pontas do cubo?*”

Aluno D: “*Os cubinhos que ficam nas quatro pontas do cubo*”.

Pesquisadora: “*Muito bem. Tem algum cubinho que podemos ver dois lados?*”

Alunos: “*Tem*” – (os alunos confundiram-se ao contar com duas faces, contando duas vezes, o mesmo lado).

Aluno D: “*Quem sabe vocês vão colocando o dedo em cima dos quadradinhos que eu já contei, aí a gente não se atrapalha*”. (Realização da contagem)

Aluno P: “*Podemos colorir as faces dos cubinhos, de cores diferentes, aí fica mais fácil pra ver*”.

Pesquisadora: “*Podem sim*”.

Aluno P: “*Tem 12 cubinhos*”.

Pesquisadora: “*E com um lado, podemos ver algum cubinho?*”

Aluno D: “*Aqueles que ficam no meio dos quadrados*”.

Aluno E: “*O cubo tem 6 lados, então 6 cubinhos com um lado colorido*”.

Pesquisadora: “*Boa observação. E tem algum cubinho que não podemos ver nenhum lado, que não é possível colorir nenhum lado, neste cubo?*”

Aluno P: “*Não! Todos foram coloridos. Alguns um lado, outros dois e outros três lados, todos estão coloridos de alguma forma*”.

Aluno E: “*Os que estão dentro do cubo?*”

Aluno P: “*Não entendi*”.

Neste momento, sugeri que desmontassem o cubo para verificar o número de cubinhos sem pintura e me afastei do grupo. Neste diálogo, cabe lembrar que, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 29), durante uma tarefa de Investigação Matemática, o papel do professor é compreender como o trabalho dos alunos está sendo processado e prestar apoio quando for necessário. No entanto, estes autores ressaltam que é preciso um certo cuidado, quando os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupo, nem a realizar tarefas envolvendo esta metodologia.

Ademais, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 52) recomendam:

Quando os alunos se confrontam com dúvidas ou com impasse no seu trabalho, não sabendo como prosseguir, o professor deve começar por colocar questões abertas. Muitas vezes, quando os alunos lhe colocam uma questão, a melhor estratégia é devolvê-la, levando a pensar melhor sobre o problema. Por vezes, há necessidade das questões se transformarem em sugestões orientadoras das atividades dos alunos.

Os grupos B1 e B2 executaram a tarefa sem solicitar auxílio. Para realizá-la e verificar a quantidade de cubinhos coloridos de acordo com os lados, contavam os cubinhos de um em um, apontando-os com o dedo para não se confundirem. Observei que os grupos B1 e B2 não desmontaram os cubos para verificar quantos ficavam com nenhuma face colorida. Contavam analisando quantos cubinhos tinham apenas uma face colorida, descontavam a camada superior e a camada inferior e assim conseguiam chegar ao resultado de quantos sobravam dentro do

cubo sem nenhuma parte colorida.

No momento da socialização, a professora/pesquisadora sugeriu construir um quadro com os resultados obtidos, para um melhor entendimento e organização. O quadro foi construído coletivamente, num painel, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Painel com informações sobre os cubos

CUBO	TOTAL DE CUBINHOS	CUBINHOS SEM PINTURA	TOTAL DE CUBINHOS COM FACES COLORIDAS			
			UMA FACE	DUAS FACES	TRÊS FACES	SEIS FACES
1x1x1	1	—	—	—	—	1
2x2x2	8	—	—	—	8	—
3x3x3	27	1	6	12	8	—
4x4x4	64	8	24	24	8	—
5x5x5	125	27	54	36	8	—

Fonte: Alunos do 5º ano.

Após a construção do quadro, instiguei-os a responderem quantas faces seriam pintadas nos cubos com aresta 6 e 7 sem construí-los. Num primeiro momento, responderam que não seria possível. Então, convidei-os a observarem o quadro e verificar o que estava acontecendo com os resultados de um cubo para outro. A seguir, o diálogo que ocorreu ao analisarem o quadro:

Aluno M: “Na coluna de 3 lados coloridos, a partir da segunda linha a resposta é igual para todos”.

Aluno N: “Porque o cubo tem 8 pontas. Não importa o tamanho do cubo, sempre vai ter 8 cubinhos, quatro em cima e quatro em baixo. E quando pintamos de 3 lados os cubinhos são as pontas. Por isso que todas as resposta são 8, desde o cubo menor até o maior”.

Todos: “É mesmo”.

A pesquisadora: “Então quer dizer que o cubo de aresta 6, de aresta 7 e os demais cubos terão 8 cubinhos com 3 faces coloridas?”

Aluno M: “Todos os cubos têm quatro pontas, não importa a quantidade de cubinhos que tem dentro”.

A pesquisadora: “Muito bem, parabéns pela observação (elogios). O que mais podemos observar, nas demais colunas”.

Aluno N: “Com duas faces coloridas, é só fazer mais 12”.

A pesquisadora: “Como assim?”

Aluno N: “É que está aumentando de 12 em 12, a partir da terceira linha. Olha só, na terceira linha tem 12, na quarta tem 24 que é $12 + 12$, na outra tem 36, que é $24 + 12$, na próxima vai ser 48, porque $36 + 12 = 48$ ”.

A pesquisadora: *“Ótima observação, perfeito. Então um cubo de aresta 6, terá 48 cubinhos com duas faces e 8 cubinhos com 3 faces coloridas”*.

Nas demais colunas, os alunos não conseguiram estabelecer relações. Então, com a minha orientação, analisaram os dados do quadro construído. Após alguns questionamentos, debates, observações, concluíram que a coluna se refere à quantidade de cubinhos, cujo resultado se obtém através da multiplicação da altura, pela largura e pelo comprimento. Assim, concluíram a coluna com a quantidade de cubinhos sem pintura, inclusive do cubo com aresta de 6 cubinhos. Observou-se que essa regra também era válida para a coluna dos cubinhos sem pintura; porém, a partir do cubo construído com aresta de 3 cubinhos. Assim o cubo com aresta de 3 cubinhos teria um cubinho sem pintura, pois $1 \times 1 \times 1 = 1$. O cubo com aresta de 4 cubinhos teria 8 cubinhos sem pintura, pois $2 \times 2 \times 2 = 8$. O cubo com aresta de 5 cubinhos teria 27 cubinhos sem pintura, pois $3 \times 3 \times 3 = 27$. E assim, sucessivamente. Os cubos com aresta de 1 e 2 cubinhos não teriam cubinhos sem pintura. Durante a análise do painel, a professora/pesquisadora fez o papel de questionadora, estimulando e orientando os alunos para que juntos realizassem a tarefa.

Diante do exposto, cabe lembrar o papel do professor, corroborando Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 53), que salientam:

Embora dando primazia ao questionamento como modo de apoio do progresso do trabalho dos alunos, o professor precisa, por vezes, também, fornecer e recordar informações. Trata-se de garantir que o fluxo da investigação não se perca porque os alunos não compreendem certos conceitos ou formas de representação importantes para a atividade. Por vezes, é necessário recordar conceitos anteriormente estudados, por exemplo, por meio de perguntas esquadrihadoras. De qualquer modo, seja ou não a partir das perguntas do professor, esses conceitos podem ganhar um novo significado para os alunos quando são utilizados na abordagem de uma nova questão matemática.

Analisando as conclusões anteriores, observou-se que faltou uma regra para a coluna de cubinhos com uma face colorida, quando o aluno N sugeriu fazer um cálculo para encontrar os resultados para esta coluna:

Aluno N: *“Se a gente somar, por linha, os cubinhos de duas faces colorida, com os cubinhos de três faces coloridas e mais os cubinhos sem nenhum lado colorido. Se a gente juntar esses três valores e diminuir com o total de cubinhos que forma o cubo vamos encontrar a resposta para a coluna de uma face colorida”*.

Para melhor explicar a estratégia do aluno N, vou descrever um exemplo: ele sugeriu que, para formar o cubo de aresta 3, são necessários 27 cubinhos. Se, do total de cubinhos que forma o cubo, neste caso 27, subtrairmos 21, que é o valor encontrado da adição de cubinhos (cubinhos com duas faces coloridas + cubinhos com 3 faces coloridas + cubinhos sem nenhuma

face colorida), teremos como resultado 6. Este valor representa os cubinhos com uma face colorida.

No coletivo, foram realizados os cálculos para demonstrar o que o aluno N estava tentando mostrar. Testamos a estratégia do aluno N com os demais cubos e comprovamos que ela estava correta. No Quadro 7, os cálculos realizados para comprovar a estratégia.

Quadro 7 – Cálculos realizados para testar uma estratégia

O cubo de aresta 3:	$12 + 8 + 1 = 21$	$27 - 21 = 6$
O cubo de aresta 4	$24 + 8 + 8 = 40$	$64 - 40 = 24$
O cubo de aresta 5	$36 + 8 + 27 = 71$	$125 - 71 = 54$

Fonte: alunos do 5º ano.

De acordo com a estratégia utilizada pelo aluno N, foi possível preencher a coluna de uma face colorida. Ao verificar se os cálculos estavam corretos, reforço o que Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 37) destacam:

A introdução da ideia de prova matemática pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável, que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas.

Nesta tarefa, instiguei os alunos a, juntos, encontrarem estratégias para atingir os objetivos propostos. Já nesta primeira tarefa, a Investigação Matemática revelou-se uma metodologia que exige tanto do aluno quanto do professor, porém os resultados são compensadores. Nesse sentido, Alro e Skovsmose (2010) argumentam que o professor necessita desafiar, mas também deve estar preparado para ser desafiado, numa troca mútua. Durante execução desta tarefa, houve essa troca, essa interação entre a professora/pesquisadora e os alunos. E assim, foi possível dar continuidade à tarefa, estabelecendo relações com os cubos de aresta 6 e 7 cubinhos, encontrando os resultados, sem o auxílio do material concreto, por meio de estratégias elaboradas durante a socialização. Na Figura 5, as informações adquiridas.

Figura 5 - Painel de relação entre os cubos, de acordo com os cubinhos coloridos em cada face

--

CUBO	TOTAL DE CUBINHOS	CUBINHOS SEM PINTURA	TOTAL DE CUBINHOS COM FACES COLORIDAS			
			UMA FACE	DUAS FACES	TRÊS FACES	SEIS FACES
$1 \times 1 \times 1 = 1$	—	—	—	—	—	1
$2 \times 2 \times 2 = 8$	—	—	—	—	8	—
$3 \times 3 \times 3 = 27$	1 (1x1x1)	6	12	8	8	—
$4 \times 4 \times 4 = 64$	(2x2x2) 8	24	24	8	8	—
$5 \times 5 \times 5 = 125$	(3x3x3) 27	54	36	8	8	—
$6 \times 6 \times 6 = 216$	(4x4x4) 64	94	48	8	8	—
$7 \times 7 \times 7 = 343$	(5x5x5) 125	150	60	8	8	—

Fonte: Alunos da turma do 5º ano.

Nesta tarefa, os estudantes utilizaram várias estratégias como: o auxílio do material dourado, os cubos construídos, a pintura dos cubinhos para diferenciar a quantidade de faces e a construção de quadros, para melhor compreensão dos cálculos. Dessa forma, com o apoio do material concreto, percebi que os alunos conseguiram realizar a tarefa proposta, elaborando suas estratégias com êxito, tendo assim uma compreensão melhor do conteúdo estudado. Logo, o conteúdo aliado ao uso de material concreto permite que os educandos melhorem a compreensão, além de tornar mais simples e interessante a explicação. Nesse sentido, Turrioni (2004, p. 66) afirma que:

O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, que é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.

Partindo da reflexão do autor, observa-se que o material concreto favorece o desenvolvimento da criatividade, a eficiência e a produtividade do educando, que consegue expressar-se melhor, o que contribui para o processo de aprendizagem e de socialização. Portanto, o uso do material concreto, ao mesmo tempo em que contribui e facilita o aprendizado do aluno, possibilita ao professor o preparo de aulas mais dinâmicas, que motivam o aluno a interagir, despertam o interesse pelo conteúdo e potencializam a vontade de aprender (KRUG, 2016, p. 16).

Ainda, é possível inferir que, com o auxílio do material concreto, o educando tornou-se

mais curioso, mais crítico durante a realização das tarefas. Outro aspecto perceptível durante o desenvolvimento da primeira tarefa foi a dificuldade para trabalhar em grupos. Mesmo estando em grupos, os alunos procuravam realizar individualmente a tarefa. Fiquei constantemente instigando-os a interagirem com os colegas, a conversarem, a trocarem conhecimentos com o grupo, para, coletivamente, elaborarem suas conjecturas. Acredito que o trabalho em grupo pode ser favorável, principalmente, em atividades que exigem a formulação de conjecturas, quando um aluno pode auxiliar o outro na elaboração. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 223), é essencial ao aluno

[...] interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Neste sentido, foi necessário intervir durante a realização das tarefas, auxiliando e orientando os educandos durante o trabalho cooperativo, uma vez que, numa aula de Investigação Matemática, o professor é um orientador, um questionador, que permite ao aluno ser autor da aprendizagem. Apesar das dificuldades e da necessidade constante de auxílio, os estudantes compreenderam a relação entre os cubos e as faces coloridas.

4.2 Tarefa 2: sequência de cubos

A segunda tarefa contempla a ideia de que um conjunto de cubinhos podem representar o volume do cubo, bem como a relação das figuras espaciais com suas planificações e o uso da sequência geométrica. Inicialmente, explorei com os alunos a definição de sequência. Observei que eles já tinham noção de sequências envolvendo álgebra, mais precisamente a adição. Relembramos algumas sequências envolvendo álgebra e outras, envolvendo figuras. Nesta atividade, foram constituídos dois grupos de três integrantes, pois faltou um aluno: o grupo C1 e o C2. Aos integrantes, foram atribuídas as mesmas letras do encontro anterior. Segue no Quadro 8 a tarefa 2:

Quadro 8 – Tarefa 2: sequência dos cubos

<p>Tarefa 2: Continuar a sequência:</p>



Fig.1

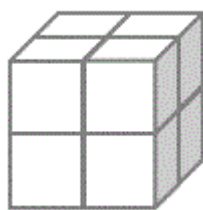


fig. 2

- a) Responder:
 - i) Quantos cubinhos serão necessários para construir a figura 3?
 - ii) Quantos cubinhos serão necessários para construir a figura 4?
 - iii) E na figura 5, quantos “cubinhos” serão necessários?
 - iv) E na figura 10?
- b) Organizar os dados encontrados e escrever as conclusões encontradas.
- c) Observar e fazer a planificação da figura 3.
- d) Escrever como o grupo pensou em fazer a planificação.
- e) Preencher o sólido construído por meio da planificação com os cubinhos. Comentar as descobertas.

Fonte: Adaptado de Giongo e Munhoz (2016, p. 291).

Para realizar a tarefa, foi disponibilizado o material dourado. Solicitei que os grupos construíssem as figuras existentes e realizassem as próximas construções de acordo com um padrão definido. Inicialmente, o grupo C1 lembrou dos cubos construídos na aula anterior e continuou a sequência construindo cubos. Posicionaram o cubo com um cubinho de aresta, construíram o cubo de aresta 2 e o cubo de aresta 3. Ao finalizar o cubo de base 3, ficaram em dúvida se estaria certo, pois haviam pensado apenas no desenho e não na quantidade de cubinhos. Questionavam-se entre eles dizendo:

Aluno D: “*Espera! Tem algo de errado*”.

Aluno L: “*Como assim*”.

Aluno D: “*Porque da primeira figura para a segunda figura aumentaram 7 cubinhos; da segunda figura para a terceira figura, aumentaram 19 cubinhos*”.

Aluno L: “*Verdade! Não tá aumentando igual*”.

Aluno D: “*Então, não é uma sequência*”.

Aluno N: “*Ao menos que a gente faça continhas de vezes*”.

Perceberam que o resultado 1 surgia da multiplicação de $1 \times 1 \times 1$; fazendo $2 \times 2 \times 2$ chegariam em 8; na multiplicação de $3 \times 3 \times 3$ obteriam 27. Sentindo-se inseguros, questionaram se poderiam multiplicar um número três vezes para ser uma sequência. Ao terem um retorno positivo, construíram o cubo de aresta 4 e, para os demais cubos, calcularam o número de cubinhos em cada cubo, como pode ser observado na Figura 6.

Figura 6 – Estratégias elaboradas pelo grupo C1 para resolver a tarefa 2



Fonte: Alunos do grupo C1.

Com a estratégia formulada, o grupo C1 organizou os dados encontrados, conforme o registro no Quadro 9, para melhor organização e compreensão da tarefa.

Quadro 9 – Estratégia formulada pelos alunos do grupo C1

Figura	Quantidade de cubinhos	Conclusão
1	1	$1 \times 1 \times 1 = 1$
2	8	$2 \times 2 \times 2 = 8$
3	27	$3 \times 3 \times 3 = 27$
4	64	$4 \times 4 \times 4 = 64$
5	125	$5 \times 5 \times 5 = 125$

Fonte: Grupo C1.

Verifiquei que os participantes do C1 interagiram mais, cooperaram entre si, para conseguirem desenvolver a tarefa. Também constatei que compreenderam as noções do estudo sobre os cubos, a relação entre o cubo e o número de cubinhos necessários para sua formação.

O grupo C2 seguiu a sequência da soma, ou seja, em cada figura a partir da primeira, adicionavam 7 cubinhos a mais que na figura anterior. As figuras formadas pelo grupo tiveram o formato de prédio, pois colocavam sempre sete cubinhos a mais em cada figura na sequência, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Integrantes do grupo C2 elaborando estratégias para resolver a tarefa 2





Fonte: Alunos do grupo C2.

Os integrantes do grupo C2 também preferiram organizar os dados num quadro para melhor entendimento. Assim, no Quadro 10, apresento a estratégia do grupo C2 para resolver a tarefa. Para organizar os dados num quadro, ambos os grupos necessitaram do auxílio da pesquisadora.

Quadro 10 – Estratégia do grupo C2 para realizar a tarefa

Figura	Quantidade de cubinhos	Conclusão
1	1	1
2	8	$1 + 7 = 8$
3	15	$8 + 7 = 15$
4	22	$15 + 7 = 22$
5	29	$22 + 7 = 29$

Fonte: Grupo C2.

Podemos verificar que os grupos utilizaram estratégias diferentes para realizar a tarefa. O grupo C1 utilizou cálculos envolvendo a multiplicação, enquanto o C2 valeu-se da adição. Os dois grupos partiram do mesmo pressuposto, porém percorreram caminhos diferentes para realizar a tarefa. Desse modo, a metodologia de Investigação Matemática, corroborando Fonseca, Brunheira e Ponte (1999, p. 4), metaforicamente, “é uma viagem até ao desconhecido”, na qual “o objetivo é a viagem e não o destino”. Isto é, o mais importante não é o final, o resultado, mas o caminho percorrido, os processos realizados para chegar ao resultado.

Quanto à planificação dos sólidos de cada figura, os alunos ficaram um tanto confusos. Expliquei o conteúdo, usando como exemplo uma caixa de sapatos que havia na sala. Mostrei

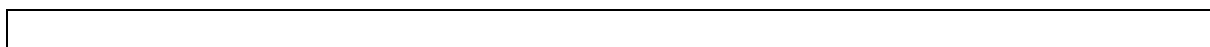
que, ao abrir a caixa de sapatos, ou seja, quando a desmontamos, encontramos diversas figuras planas, neste caso, diversos retângulos. A união desses retângulos formam a planificação da caixa. Ressaltei que podemos encontrar caixas/planificações com diferentes formas geométricas. A turma colaborou, citando exemplos, como o formato da caixa de pizza, composta por uma figura plana de 8 lados, além de diversas outras caixas que lembraram no momento. Após esta discussão, os alunos deram início a suas planificações.

O grupo C1 construiu a figura de acordo com a tarefa, um cubo de aresta 3, sobre a folha de ofício. Para fazer a planificação, o grupo contornou a figura do cubo e constatou que necessitava de um quadrado para deixar embaixo da figura e mais quatro quadrados iguais para contornar a figura, usando assim 5 quadrados para realizar a planificação, deixando o cubo aberto. Percebeu também que era preciso desenhar um quadrado para ser a base e, em cada aresta do quadrado da base, outro quadrado igual para os lados do cubo.

Durante a planificação, o grupo lembrou que já haviam construído figuras dessa forma, semelhantes aos “dados” e seguiram os mesmos critérios. Traçaram, recortaram, fizeram a dobradura e coloram o que faltava para colar a caixinha, ou seja, a planificação do cubo de aresta 3.

Concluída a planificação, os alunos foram instigados a comprovar que o total de cubinhos pertencentes ao cubo de aresta 3 caberia na planificação formada. No primeiro momento, o grupo concluiu que não seria possível colocar os 27 cubinhos na caixinha confeccionada. Foram então convidados a fazer a verificação colocando os cubinhos no sólido construído. Conforme os cubinhos se encaixavam, foram constatando que seria possível encaixar os 27 cubinhos na planificação construída. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 23), nas tarefas investigativas, é importante o papel do aprendente, que “é chamado para agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos seus resultados e na discussão e argumentação”. A Figura 8 mostra que as conjecturas elaboradas pelos alunos tiveram êxito.

Figura 8 – Comprovação de que o número de cubinhos coube na planificação





Fonte: Alunos do grupo C1.

O grupo C2, para realizar a planificação da Figura 3, colou a folha de desenho ao lado da figura construída, para verificar as medidas das laterais. Contornou com lápis a figura e recortou retângulo por retângulo, sendo necessários 4 retângulos. Para fazer a base, também usaram o mesmo critério: colocaram a folha de desenho pertinho da figura construída e marcaram as medidas, sem usar régua. Como o grupo recortou cada face lateral individualmente, tiveram dificuldades em unir as partes para formar a planificação. Assim, foi necessário pôr proteção de apoio na planificação, como se observa na Figura 9.

Figura 9 – Grupo C2 fazendo a planificação do sólido construído



Fonte: Alunos do grupo C2.

Durante a socialização, verifiquei que os alunos foram capazes de inferir que os cubinhos representam o volume dos sólidos construídos, estabelecendo relações com a caixa d'água, o silo de ração, o litro de refrigerante, entre outros.

Também constatee os obstáculos que os alunos enfrentam para relatar, por escrito, as estratégias utilizadas, ou seja, não sabem o que e como descrever as conjecturas e as conclusões referentes à tarefa realizada. Essas inferências corroboram as ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 35), ao afirmarem que “o registro escrito constitui um desafio adicional aos alunos, porque exige um tipo de representação que nunca utilizaram. Sendo este, um elemento imprescindível, no momento da socialização, na discussão do trabalho realizado, garantindo o sucesso da aula”.

Nesta tarefa, os grupos mostraram interesse e empenho, compartilhando as conclusões de cada integrante. O material manipulável foi importante na resolução das questões pelos grupos, bem como para chegar à generalização da resolução. Observei que o grupo C1, para realizar a tarefa, usou como estratégia a ideia da multiplicação na sequência. Já o grupo C2 usou como estratégia a ideia de que, na sequência, soma-se sempre o mesmo valor. Na planificação das figuras, os grupos agiram de forma diferente. A estratégia do C2 foi por faces, uma a uma, enquanto o C1 procurou criar sua planificação num todo, deixando as faces interligadas. Assim, segundo os autores citados no parágrafo anterior, a Investigação Matemática é um meio de colocar os estudantes diante de situações, mecanismos e fenômenos ricos e complexos com os quais eles podem descobrir relações, padrões, semelhanças e diferenças para, desse modo, chegarem a uma generalização.

4.3 Tarefa 3: orientação e localização no espaço

A terceira tarefa desenvolvida teve como objetivo descrever o deslocamento e a localização de pessoas no espaço, por meio de malhas quadriculadas ou por representações como desenhos, por mapas ou por planta baixa e croquis, podendo empregar termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares. O intuito da tarefa era identificar como os alunos se orientariam e também como auxiliariam na orientação de outras pessoas.

Neste encontro, os alunos foram organizados em dois grupos, um, com três estudantes e outro, com quatro estudantes, sendo identificados como F1 e F2. Entreguei-lhes o enunciado da tarefa 3, que segue no Quadro 11, e realizei a leitura coletiva.

Quadro 11 - Tarefa três: localização e deslocamento de pessoas no espaço

Tarefa 3: Auxiliar uma pessoa que está em nossa sala, mas que não conhece nosso município, a ir até a

prefeitura. Registrar todas as informações e orientações que serão dadas a essa pessoa.

Fonte: Da autora (2020).

Analisando os resultados emergentes, observei que os grupos usaram diferentes estratégias para realizar a tarefa. O grupo F1 optou pela forma escrita, já o F2 decidiu fazê-la em forma de desenho.

O grupo F1, que utilizou como estratégia a escrita, dramatizou uma parte da tarefa. Um aluno escrevia, enquanto os outros dramatizavam (em forma de passos e usando direções como: direita, esquerda e siga em frente - até o portão da escola). O restante do trajeto foi descrito lembrando o percurso. A seguir, o procedimento do grupo F1 para concluir a tarefa:

Ao abrir a porta, dê 5 passos e vá para a direita. Dê 10 passos e, a seguir, vire à esquerda. Vá até o portão da saída dos micro-ônibus, assim que chegar, vire a esquerda. Siga reto, quando você chegar num certo ponto vai ter duas ruas uma para vai para esquerda e outra para a direita. Vá a esquerda até que você chega na prefeitura (ALUNOS INTEGRANTES DO GRUPO F1).

Nas respostas dos alunos, em momento algum, aparecem nomes de ruas. A descrição escrita a partir da saída da escola ficou sucinta. Fica evidente a dificuldade dos alunos em indicar um caminho oralmente ou por escrito. Rios e Mendes (2009) ressaltam a importância de trabalhar com os estudantes, desde os anos iniciais, conhecimentos relativos à orientação e à localização no espaço, para poderem compreender melhor a organização do espaço onde se encontram, não só para o aprendizado de conteúdos geográficos, mas também para a vida do educando, a fim de desenvolver a capacidade de percepção do seu espaço.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular, estudar posições e deslocamentos no espaço pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. Ademais, a BNCC determina que:

Tomando como ponto de partida a sala de aula, em que o/a estudante visualiza os pontos de referência, deve-se ampliar gradativamente os espaços para aqueles que ele/a já não consegue mais visualizar, tais como seu bairro e sua cidade. A descrição de deslocamentos permite que o/a estudante aprimore seu vocabulário, servindo-se de termos como paralelas, transversais, esquerda, direita, entre outros, o que pode ser facilitado usando como suporte, além de deslocamentos próprios, mapas (em papel ou em *tablet* e *smartphone*) croquis e outras representações (BRASIL, 2018, p. 255).

Já o grupo F2 apresentou o percurso em forma de desenho, dialogando, trocando ideias entre os componentes do grupo. Na Figura 10, a imagem feita pelo grupo.

Figura 10 – Percurso desenhado pelo grupo F2



Fonte: Estudantes do grupo F2.

Observando a Figura 10, fica evidente que os estudantes buscaram, através do desenho, dar uma orientação, o que facilitou a conclusão da tarefa. O desenho demonstra que os alunos tinham noções fundamentais de referências, de localização, de orientação, de distância, para deslocar-se com autonomia e representar os lugares onde vivem. Percebi que o grupo desenhou com detalhes o trajeto percorrido, o que evidencia uma visão criteriosa do caminho a ser percorrido. Por meio do desenho, o grupo demonstrou ter capacidade de organização espacial. Passini (1998, p. 11) salienta que “a capacidade de visualização da organização espacial é importante como conhecimento para uma participação responsável, consciente e a possibilidade de propor mudanças alternativas”.

Após a socialização dos grupos, lançamos o desafio para duas professoras voluntárias da escola realizarem o percurso, mas sem saber o destino de chegada. Uma das professoras realizou o percurso seguindo o desenho do grupo F2 e a outra professora baseou-se na escrita do grupo F1. Cada grupo acompanhou as professoras durante o percurso.

Na volta para a sala de aula, houve um pequeno debate com as professoras, que confirmaram ter chegado ao destino previsto. Ressaltaram que o percurso desenhado ficou bem-feito e que qualquer pessoa que fosse seguir as flechas chegaria ao destino, sem problema. Porém, chamaram atenção de que tanto no desenho como na escrita, faltaram detalhes como nome de ruas, número das casas, bem como destacaram a importância dos pontos de referências para a localização. Sugeriram que o percurso escrito poderia ter sido enriquecido com mais detalhes e informações. A partir desse diálogo, os alunos também perceberam a falta de informações relativas aos percursos e a importância de orientações precisas quando se trata de rotas de percursos.

Esta tarefa foi instigante e diferente para os alunos e serviu de estímulo para perceberem a necessidade de orientações, pontos de referências, distâncias, bem como a necessidade de dados mais precisos e mais detalhes para melhorar a descrição do percurso. O grupo F1 usou como estratégia descrever o trajeto. Foi bem sucinto, demonstrando dificuldades em prestar informações acerca do percurso por meio da escrita. Já o Grupo F2 usou como estratégia um desenho ilustrado, usando setas para indicar o caminho.

Cabe ressaltar novamente a importância do trabalho em grupo, considerando que um aluno auxilia o outro. Nesta tarefa, principalmente, pois o grupo F1 valeu-se da dramatização como estratégia para facilitar a descrição escrita do trajeto. Assim, um colega dramatizava e os outros registravam por escrito o percurso. Eles só conseguiram realizar a tarefa, porque houve apoio, participação e comprometimento de todos os integrantes do grupo. Brunheira e Fonseca (1995, p. 4) salientam que “as atividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos trabalharem em grupo, conjugam ideias com mais facilidade e ultrapassam dificuldades, aumentam a confiança para enfrentar novos problemas e promover a discussão entre alunos.” Acredito que quanto mais as tarefas forem desenvolvidas em contextos cooperativos, mais os discentes aprenderão a conviver.

4.4 Tarefa 4: construção de figuras usando dobraduras

A quarta tarefa teve como objetivos: estudar os polígonos considerando os lados; analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes para construir os diferentes tipos de triângulos, por meio de dobraduras e cortes; reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras; verificar as técnicas usadas para construir polígonos, por meio de dobraduras e corte, reconhecendo-os, nomeando-os e comparando-os, considerando os lados e ângulos. No Quadro 12, a tarefa 4, proposta aos alunos do 5º ano.

Quadro 12 – Tarefa 4: construir figuras a partir de dobraduras

Tarefa 4: Construir figuras através de dobraduras

- a) Numa folha de papel dobrada ao meio, cortar diversos formatos triangulares, com apenas dois cortes, com medidas iguais e com medidas diferentes. Desenhar um esboço que mostre os resultados obtidos e comentar as descobertas.
- b) Usar dobras e recortes para formar uma peça quadrangular. Comentar os resultados encontrados.
- c) Para formar peças com formato de polígonos com mais lados, como dobrar a folha e fazer os recortes? Encontrar uma relação entre o número de lados da figura e o número de dobragens, preenchendo o quadro que segue.
- d) E, para formar peças poligonais com mais lados, como dobrar a folha e fazer os recortes? Encontrar uma relação entre o número de lados da figura e o número de dobragens, preenchendo o quadro que segue.

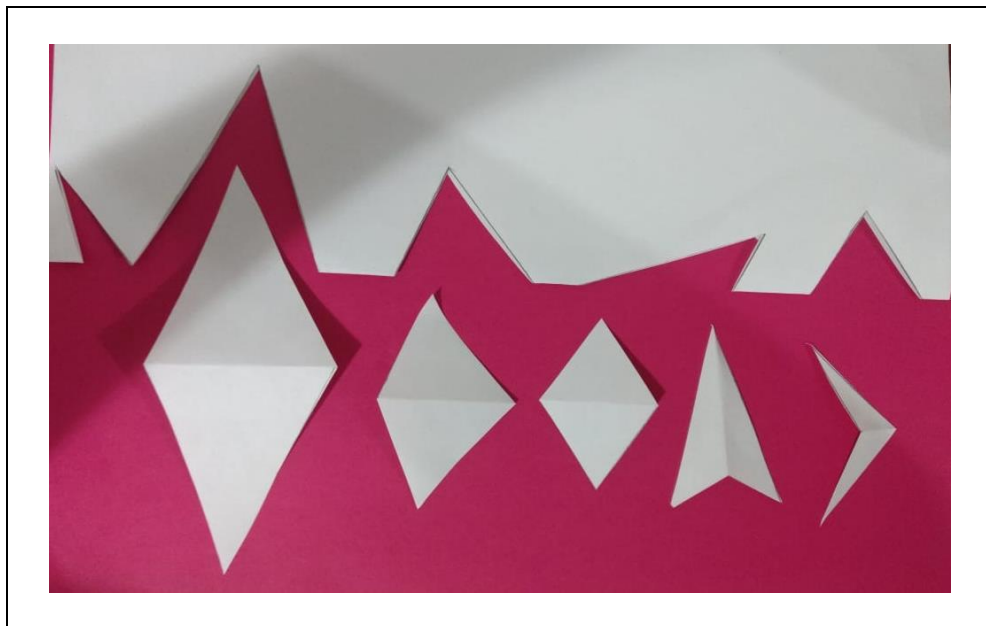
Números de dobragens	Número de lados da face	Relação entre o número de lados e o número de dobragens

Fonte: Adaptação Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 72 e 74).

Esta tarefa foi realizada pelos sete alunos em conjunto. Primeiramente, distribuí tesouras e papel e solicitei que fizessem a leitura coletiva, apenas da letra “a” da tarefa 4, a qual enunciava: “numa folha de papel dobrada ao meio, cortar diversas peças triangulares, com apenas dois cortes, com medidas iguais e com medidas diferentes. Desenhar um esboço que mostre os resultados obtidos e comentar as descobertas”. No entanto, houve necessidade de uma segunda leitura a fim de esclarecer melhor a tarefa. Neste diálogo inicial, percebi que a turma conhecia vários tipos de triângulos, porém não sabia identificá-los pelo nome, com base na medida dos lados e dos ângulos.

Dando início à tarefa, os alunos dobraram as folhas e utilizaram réguas para desenhar os triângulos com medidas de lados iguais e triângulos com medidas de lados diferentes; na sequência, recortaram as figuras. Os alunos desenharam os mais diversos tipos de triângulos: escalenos, equiláteros, isósceles, obtusângulos e acutângulos, porém, ninguém havia construído um triângulo retângulo. Na Figura 11, as construções realizadas pelo aluno D.

Figura 11 – Estratégia utilizada pelo Aluno D, ao tentar realizar a tarefa 4



Fonte: Aluno D.

Quando questionei quais peças surgiram a partir dos recortes, responderam que haviam encontrado apenas peças com formato de quadrilátero, conforme também retrata o comentário de um aluno, no diário de campo:

“Recortamos triângulos de diferentes tamanhos, mas quando abrimos os triângulos recortados, encontramos figuras em forma de quadriláteros. Alguns quadriláteros como losango, e outras formas de quadrilátero qualquer, sem nome” (Aluno E).

A partir das descobertas e das análises, ocorreu o seguinte diálogo com os alunos:

Pesquisadora: “Por que só foi possível encontrar figuras em formato de quadriláteros?”

Aluno N: “Porque a folha está dobrada ao meio e quando fizemos dois cortes e depois abrimos a folha fica o dobro dos cortes dando um quadrilátero”.

Pesquisadora: “Mas seria possível encontrar outro formato?”

Aluno M: “Recortamos de vários jeitos e só encontramos quadriláteros”.

Pesquisadora: “Vamos tentar realizar outros cortes, para ver se encontramos outros formatos”.

Muitas tentativas, mas continuavam encontrando apenas formatos de quadriláteros.

Pesquisadora: “Alguém de vocês fez o desenho de um triângulo com um dos ângulos retos?”

Silêncio. (Alunos confusos, não entendendo o que é um triângulo com ângulo reto).

Aluna D: “O que é um ângulo reto?”

Aluno E: “É quando duas retas se encontram e fica assim, oh. Como a goleira, tem dois ângulos retos nos cantos de cima. É por isso que quando alguém faz um gol no cantinho, se diz um gol no ângulo”.

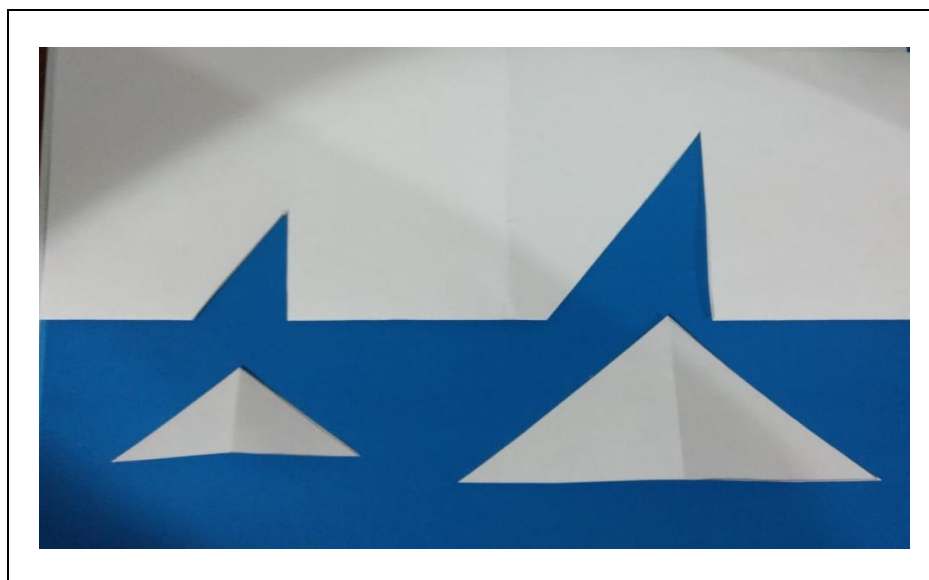
Pesquisadora: “Isso mesmo, é dois segmentos que formam um ângulo de 90° . Um ângulo de 90° é chamado de ângulo reto”.

Aluno D: “Então um lado do triângulo tem que ficar bem retinho?”

Com mais tentativas de recortes, alguns conseguiram encontrar peças com formato de triângulo; no entanto, outros necessitaram do apoio dos colegas, pois ainda recortaram peças

com formato de quadriláteros. Com meu apoio e intervenção, compreenderam que um dos segmentos deveria formar um ângulo de 90° para obter uma outra forma geométrica, além de quadriláteros. Fonseca, Brunheira e Ponte (2004) argumentam que o papel do professor numa aula de investigação matemática é assumir a função de moderador e de orientador, cabendo-lhe estimular a comunicação entre os alunos. Os autores acreditam que os alunos, ao serem confrontados em suas hipóteses, estratégias e justificações com diferentes pontos de vista, são estimulados a explicitar ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas. Desta forma, os discentes realizaram a tarefa, trocando ideias com os colegas, discutindo suas conjecturas, traçando triângulos retângulos, como podemos visualizar na Figura 12, realizada por um dos estudantes da turma do 5º ano.

Figura 12 – Tarefa realizada pelo aluno P



Fonte: Aluno P.

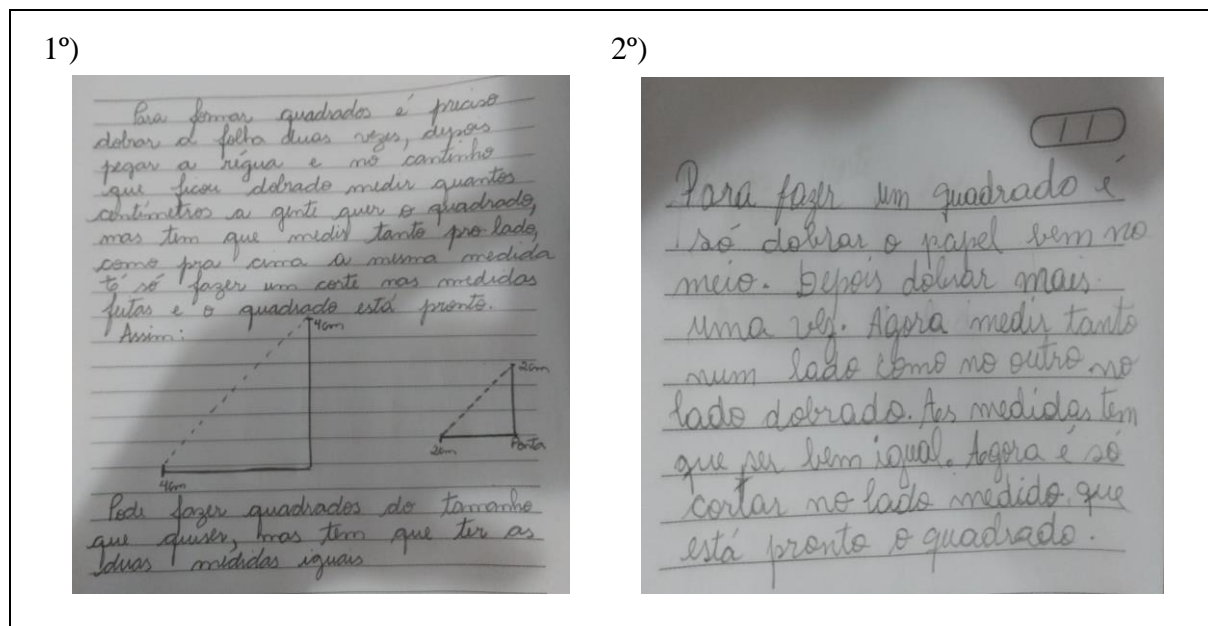
Ao explorarem a segunda parte da tarefa, a letra “b”, que consistia em usar dobras e recortes para formar peças quadradas, a turma fez muitas tentativas. Perceberam que seriam necessárias duas dobras na folha, porém não conseguiam formar peças quadradas; apenas peças em formato de losango. Depois que já haviam realizado várias tentativas, lembrei com eles o conceito de quadrado e o conceito de losango.

Nessa fase, alguns alunos perceberam que, para construir uma peça em forma de quadrado eram necessários ângulos retos e medidas iguais para os segmentos. De acordo com Passos (2000), o conhecimento básico da Geometria é fundamental para os indivíduos interagirem com o meio; por isso, esse conhecimento (conceitos, propriedades e relações simples de Geometria) deveria ser introduzido já nos anos iniciais, para que, na sequência do

Ensino Fundamental, compreendam de forma significativa seus fundamentos.

No diário de campo de alguns alunos do 5º ano, consta o relatório da solução encontrada para a construção de peças quadradas. Na Figura 13, os relatórios dos alunos M e N, deste item da tarefa 4.

Figura 13 – Relatório dos alunos M e N, encontrados no diário de campo



Fonte: Aluno N (1º) e aluno M (2º).

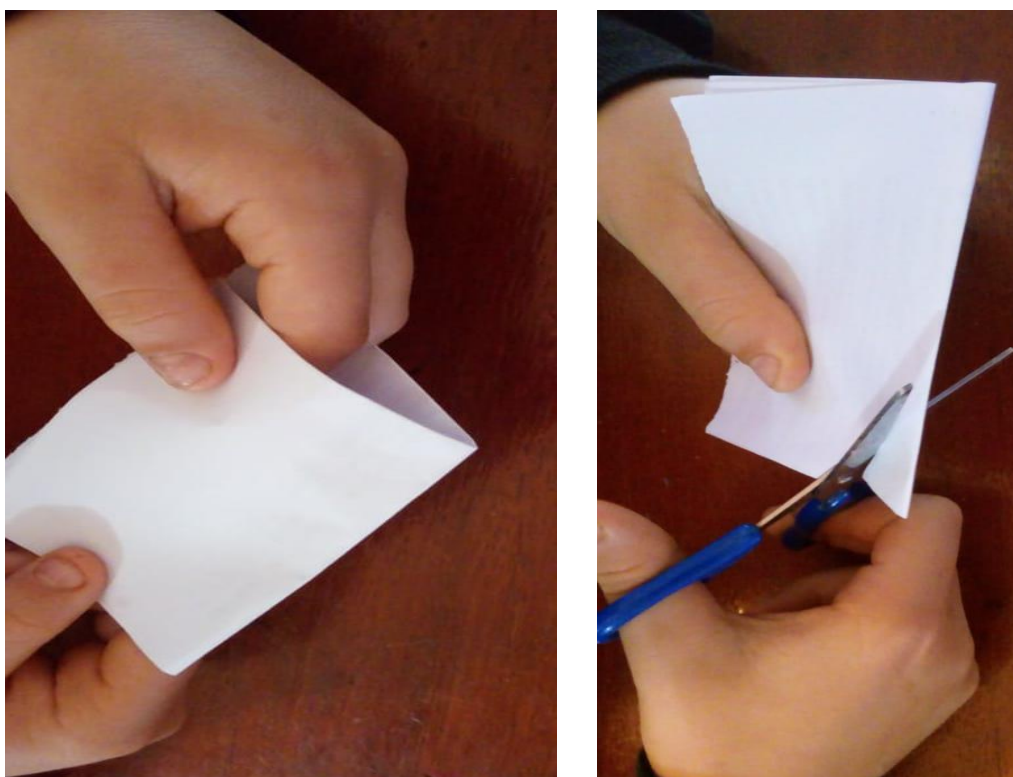
Alguns alunos necessitaram do meu auxílio e o dos colegas para concluir a tarefa, durante a qual notei a dificuldade deles em resolver situações que envolvem dobraduras e em desenhar e conceituar figuras geométricas. Também percebi que os alunos sentiram dificuldades para elaborar conjecturas, generalizar resultados e expressar matematicamente o raciocínio utilizado na resolução da tarefa. Para Fonseca, Brunheira e Ponte (2004), no caso de os alunos terem dificuldades em organizar os dados e em formular questões, o que é determinante para o prosseguimento da investigação, o professor deverá apoiá-los. Alro e Skovosmose (2010) acrescentam que podemos sair da rotina dos exercícios e entrar em um ambiente de aprendizagem diferente, em que os alunos podem formular questões e desenvolver uma forma diferente de resolvê-las.

Para finalizar, o enunciado da última parte da tarefa quatro solicitava estratégias para formar peças poligonais com mais lados, analisando as dobraduras da folha e os recortes. Também deveriam observar se existia relação entre o número de lados da figura e o número de dobraduras. Após a leitura coletiva, ciente de que todos os alunos entenderam o objetivo da tarefa, determinei que o grupo, de forma coletiva, a iniciasse. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006,

p. 26) salientam que “o professor tem que garantir que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e o que deles se espera no decurso da atividade”.

Uma das estratégias usadas pelo grupo, devido à experiência anterior, foi formar peças em forma de quadriláteros. Os estudantes perceberam que, a partir da segunda dobragem, estando a folha na forma retangular e recortando o canto dobrado, o número de quadriláteros duplicava. Na Figura 14, podemos observar a forma como os alunos procederam.

Figura 14 – Dobradura e recorte formando peças em forma de quadriláteros



(Continua...)



Fonte: Alunos do 5º ano.

No Quadro 13, a estratégia utilizada pela turma para verificar que relações ocorriam entre o número de peças em formato de quadrilátero e o número de dobragens. É possível observar que, a cada dobragem (a partir da segunda), os alunos encontravam o dobro de peças, mas sempre com o mesmo formato (peças quadrangulares).

Quadro 13 – Estratégia construída pelos alunos do 5º ano ao resolverem a tarefa 4

Números de dobragens, com apenas um corte	Número de peças em formato de quadriláteros	Relação entre o número de dobragens na folha e o número de peças no formato de quadriláteros
2	1 quadrilátero	Cada vez que se dobra a folha, dobra o número de peças em formato de quadrilátero.
3	2 quadriláteros	
4	4 quadriláteros	
5	8 quadriláteros	

Fonte: Alunos do 5º ano.

Todos os alunos da turma entenderam a relação entre o número de dobragens e o número de peças em formato de quadriláteros. Instiguei-os, então, a encontrarem outros polígonos. Após vários testes, constatei que eles dobravam a folha sempre no mesmo sentido. Nesta fase, interpelei-os a tentarem diferentes formas de dobradura. Em seguida, um dos alunos me questionou a respeito da forma que encontrara. O diálogo ilustra a exploração da tarefa:

Aluno N: “Profe esse recorte é uma figura geométrica? Parece um círculo”.
 Pesquisadora: “Vamos analisar - quantos lados possui esse formato?”
 Aluno N: “8 lados”.

Nesse momento todos observam a construção feita pelo colega e ouvem com atenção o diálogo.

Pesquisadora: “Qual nome recebe uma figura geométrica com 8 lados?”

O aluno E ajuda o colega: “Octógono”.

Pesquisadora: “Como você conseguiu construir esse formato de octógono?”

Aluno N: (mostrando a folha de papel) “Primeiro dobrei assim, ao meio, depois mais uma vez ao meio e recortei uma vez aqui na ponta, então encontrei um quadrilátero, como antes. Então comecei de novo, dobrei ao meio, mais uma vez ao meio e uma vez em forma de triângulo e recortei encontrando essa figura”.

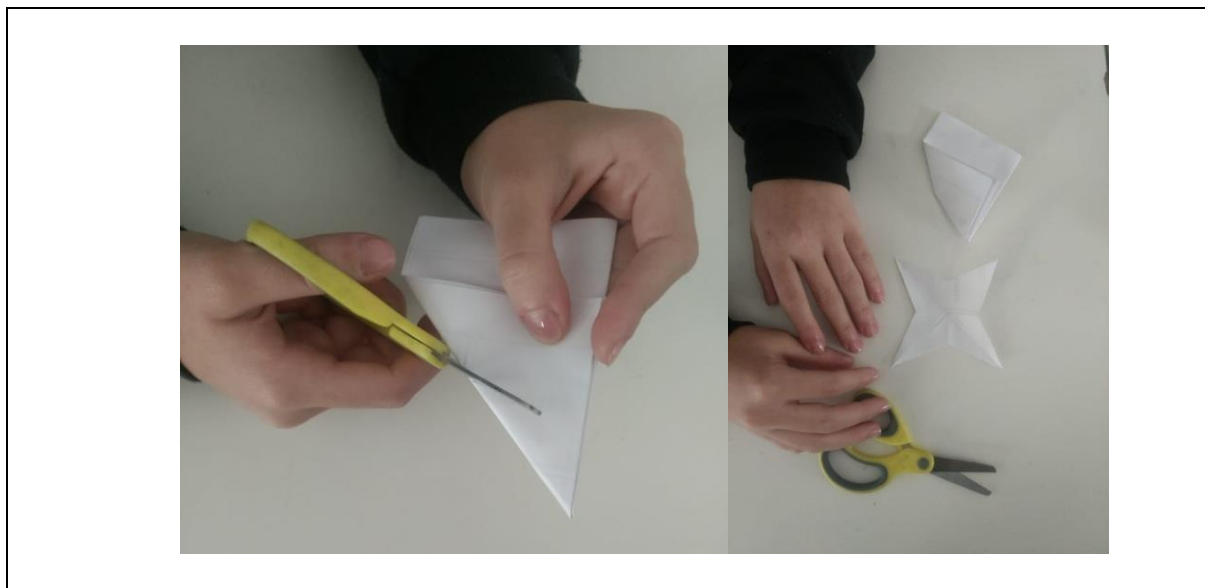
Pesquisadora: “E se você fizesse mais uma dobra”.

Todos os estudantes fizeram o teste.

Aluno M: “Nossa! Olha só! Vamos ter 16 lados”.

Neste momento, construímos um quadro com as informações adquiridas, para uma melhor compreensão das descobertas dos estudantes. Ao dobrarem a folha duas vezes, encontraram uma peça em forma de quadrilátero. Ao dobrarem duas vezes a folha ao meio e mais uma vez em formato de triângulo (seriam 3 dobras), uma peça em formato de octógono, como é possível visualizar na Figura 15.

Figura 15 – Momento do recorte da dobradura formando a peça em forma de um octógono



Fonte: Aluno P.

Fazendo mais uma dobra na folha, isto é, dobrar a folha duas vezes e mais duas dobras em formato de triângulo totalizando 4 dobras, chegavam a 16 lados, ou seja, uma peça com formato de hexadecágono. No Quadro 14, as conclusões dos alunos.

Quadro 14 – Estratégias elaboradas para desenvolver a tarefa 4

Números de dobragens com um recorte	Número de lados da peça formada
2	4
3	8
4	16

Fonte: Alunos do 5º ano.

Ao completar o Quadro 14, os discentes descobriram que, aumentando o número de dobragens, o número de lados das peças construídas da linha anterior dobrava. Assim, concluíram que não era necessário continuar os testes, pois, na próxima dobragem, encontrariam uma peça com 32 lados e assim, sucessivamente. Também constataram que, ao dobrar cinco vezes a dobragem, seria difícil realizar o recorte.

Concluída a tarefa 4, iniciei discussão sobre as descobertas dos alunos. Percebi que, apesar de sentirem dificuldades em trabalhar com dobraduras, estavam entusiasmados e envolvidos em aprender de forma diferenciada, pois entenderam que as peças tinham formato de diferentes polígonos cujas denominações têm a ver com a quantidade de lados. No decorrer desta tarefa, também foi discutido que um ângulo é a medida da abertura de duas semirretas que partem da mesma origem; que o ângulo reto é um ângulo de 90° . Destaco que os alunos se valeram das seguintes estratégias de resolução da tarefa: dobraduras, recortes, réguas e quadros (para melhor compreensão da conjectura). A cada encontro, percebia a evolução do trabalho em grupo. Um colega colaborava com o outro, apoiando, ajudando, formulando estratégias para melhor compreender a tarefa.

4.5 Tarefa 5: cálculo de áreas e perímetros

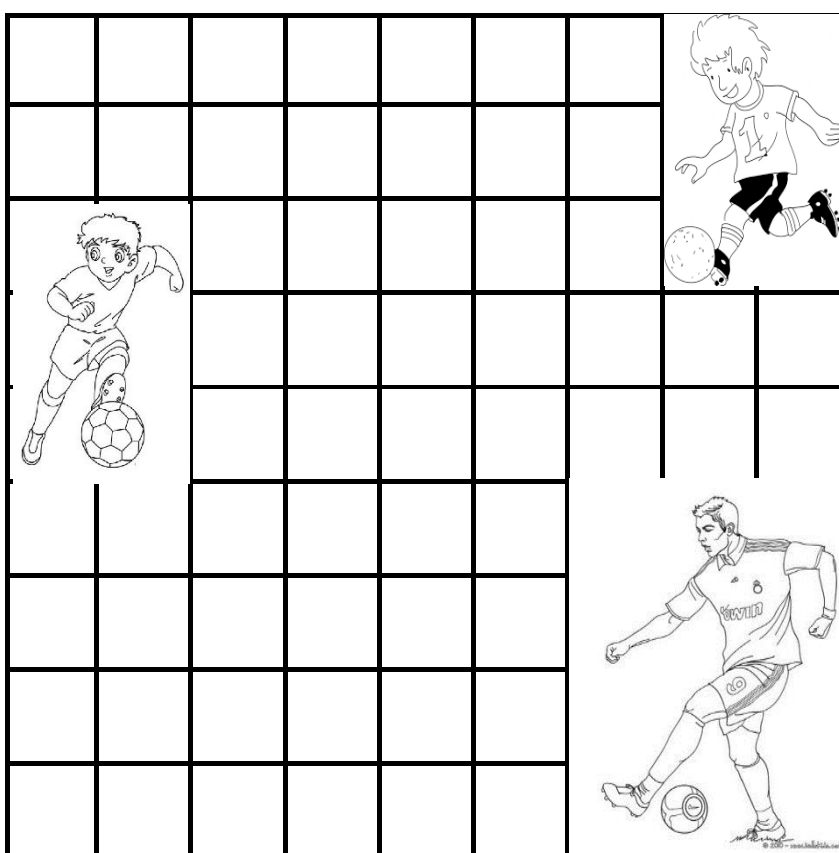
A tarefa 5 consistiu na investigação da formação de polígonos e da relação entre áreas e perímetros, com o objetivo de analisar as estratégias que os alunos utilizariam para unir objetos na malha quadriculada, reconhecer e nomear os polígonos considerando os lados. A tarefa também tinha o intuito de medir e de estimar comprimentos, incluindo cálculo de perímetros e áreas de figuras planas desenhadas na malha quadriculada, utilizando unidades de medida padronizadas.

No primeiro momento, os alunos foram questionados quanto aos nomes dados aos polígonos de acordo com o número de lados. Percebi que os alunos lembravam do triângulo,

do quadrado, do retângulo, do losango, mas não lembravam das demais figuras. Quando questionei se o quadrado, o retângulo, o losango seriam quadriláteros, os estudantes ficaram em dúvida. Então, sentamos em círculo para relembrar os nomes dados às figuras geométricas planas e os respectivos conceitos. Depois desta conversa, distribuí a tarefa 5, que está no Quadro 15, aos dois grupos, denominados de grupo V1 e V2.

Quadro 15 – Tarefa: nomenclatura de polígonos e medidas de áreas e perímetros

Tarefa 5: No desenho que segue, unir os 3 jogadores de futebol passando por cima dos segmentos que formam a malha quadriculada. Cada lado da malha equivale a 1 cm.



- Quantos lados têm a figura formada?
- De acordo com os lados da figura formada, como ela é classificada? (Nome que ela recebe)
- Qual é a medida do contorno dessa figura, ou seja, o perímetro?
- Por quantos quadradinhos a figura é formada? Qual o valor da área?

Fonte: Adaptação Carvalho e Pitombeira (2010, p. 150).

Ao entregar a tarefa, novamente enfatizei a importância do trabalho coletivo. Salientei que explorassem juntos a tarefa e elaborassem as conjecturas. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 29), “ao propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos, caracterizando a

atividade investigativa em Matemática.” Ademais, os autores acrescentam:

A exploração inicial da situação é uma etapa na qual os alunos, muitas vezes, precisam gastar algum tempo. [...] No entanto, essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas. É nessa fase que se vão embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 30).

Neste sentido, na primeira tarefa, que era unir os jogadores formando um polígono, na malha quadriculada, observei que dois grupos construíram figuras a que estão habituados, principalmente, retângulos, sem apreensão com medidas de área e perímetro. Nas Figuras 16 e 17, as construções realizadas pelos dois grupos.

Figura 16 – Tarefa realizada pelo aluno P, integrante do grupo V1

Atividade 3: No desenho que segue, unir os 3 jogadores de futebol passando por cima dos segmentos que formam a malha quadriculada. Cada lado da malha equivale a 1cm.

a) Quantos lados têm a figura formada?
4

b) De acordo com os lados da figura formada, como ela é classificada? (Nome que ela recebe)
retângulo por que de cima e de baixo tem 5 quadradinhos e de lado tem 4

c) Qual é a medida do contorno dessa figura, ou seja, o perímetro? 18 cm
contando cada lado dos quadradinhos

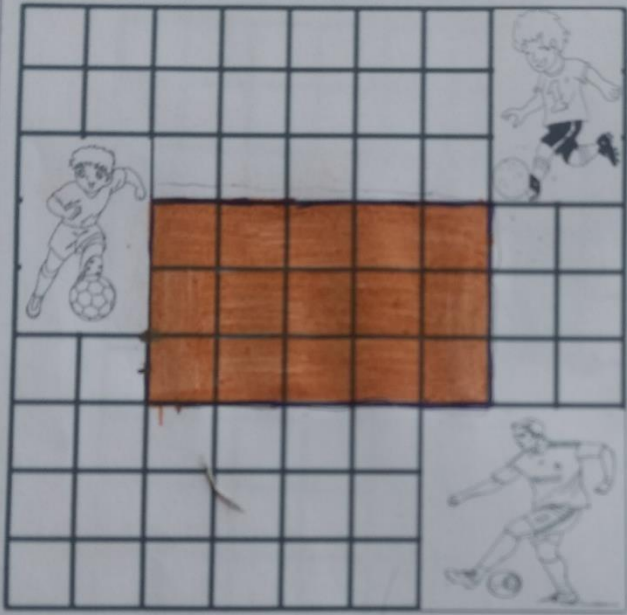
d) Por quantos quadradinhos a figura é formada? Qual o valor da área?

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

Fonte: Aluno P.

Figura 17 – Tarefa realizada pelo aluno M, integrante do grupo V2

Atividade 3: No desenho que segue, unir os 3 jogadores de futebol passando por cima dos segmentos que formam a malha quadriculada. Cada lado da malha equivale a 1 cm.



a) Quantos lados têm a figura formada? 10

b) De acordo com os lados da figura formada, como ela é classificada? (Nome que ela recebe) Retângulo, porque o lado de baixo e o de cima têm o mesmo medida e os lados também têm o mesmo medida.

c) Qual é a medida do contorno dessa figura, ou seja, o perímetro? 16 cm
contamos em 1 em 1

d) Por quantos quadradinhos a figura é formada? Qual o valor da área? 12 contamos de 1 em 1. Depois descobrimos que podemos fazer uma conta 3 x 4

Fonte: Aluno M.

Nesta tarefa, a dificuldade foi distinguir área de perímetro, sendo necessário relembrar os conceitos. Para realizar a tarefa, os alunos contaram de um em um, os quadradinhos no interior da figura, para descobrir a área. Questionei-lhes se esta era a única forma de descobrir o valor da área. Logo perceberam que, multiplicando o número de quadradinhos da base pela altura, encontrariam o valor da área.

Para calcular o perímetro, os alunos também contavam de um em um, os quadradinhos do contorno da figura, conforme o exemplo da Figura 17, que aponta o perímetro igual a 12

unidades. Sugerir que imaginassem que teriam que andar ao redor da figura e que cada segmento de um quadradinho seria como se fosse um passo e indaguei o que aconteceria. Ao perceberem que contando dessa forma, o valor do perímetro seria diferente, questionei as demais formas de calcular o perímetro. A seguir, o diálogo com os estudantes do grupo V1, no decorrer da tarefa:

Pesquisadora: *“Onde surgiu 12 unidades de medida para o perímetro?”*

Aluno M: *“Contando ao redor do retângulo, assim: um, dois ,..., doze unidades”* (e assim o aluno foi apontado com o dedo os quadradinhos que contava).

Pesquisadora: *“Vamos contar imaginando que cada segmento de um quadradinho, seja um passo. Quantos passos seriam suficientes para contornar essa figura?”*

Alunos do Grupo V realizaram a contagem coletivamente: *“16 unidades”*.

Aluna M: *“Tem algo de errado, vou contar de novo* (realizou a contagem em voz alta individualmente), *pois é deu 16. O que aconteceu?”*

Silêncio. As integrantes do grupo realizaram a contagem individual, de forma silenciosa.

Aluna L: *“É que nos cantos, nós contamos só um quadradinho, e para caminhar ao redor é preciso contar dois risquinhos nos quadradinho dos cantos”*.

Aluna D: *“Verdade. São dois passos, um de um lado e o outro do outro”*.

Pesquisadora: *“Isso mesmo. Nos quadradinhos dos cantos da figura devemos contar dois segmentos. Sendo assim, o perímetro da figura igual a 16. Mas podemos realizar o cálculo do perímetro de outra forma sem contar de um a um?”*

Outra vez silêncio e cálculos realizados individualmente de forma silenciosa.

Aluno M: *“Sim. Podemos contar 3 quadradinhos no lado, mais 5 quadradinhos embaixo, mais 3 quadradinhos no outro lado e mais 5 quadradinhos em cima”*.

Pesquisadora: *“Então temos: $3 + 5 + 3 + 5 = 16$ unidades”*.

Analisando o diálogo, constatei que os alunos conseguiram compreender o conceito de perímetro de um retângulo e as formas de encontrar seu valor. Para Ponte (2006), o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental para a aprendizagem, pois “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo”. Para Lamonato (2007), a Investigação Matemática em sala de aula proporciona ao estudante a vivência do processo de construção do conhecimento, isto é, não visa apenas ao resultado final. Ademais, por meio de tarefas investigativas, o estudante pensa sobre o que se investiga e pode desenvolver outros saberes além dos solicitados pelo professor.

O grupo V2 verificou que a soma dos lados do retângulo resulta no perímetro. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a Investigação Matemática se apresenta como uma possibilidade que pode enquadrar-se nesta perspectiva mais abrangente de aprendizagem, tirando o foco da repetição e da memorização e colocando o estudante como autor de sua aprendizagem. Ademais, o trabalho investigativo em Matemática se caracteriza, inicialmente, por não possuir objetivos precisos, mas se estruturam aos poucos e por proporcionar aos estudantes a experimentação, a formulação e o teste de conjecturas.

Os grupos também realizaram a segunda parte da tarefa, na qual tiveram que elaborar

estratégias para descrever o caminho mais curto para realizar a tarefa proposta. No Quadro 16, a continuação da tarefa 5.

Quadro 16 – Segunda parte da tarefa 5

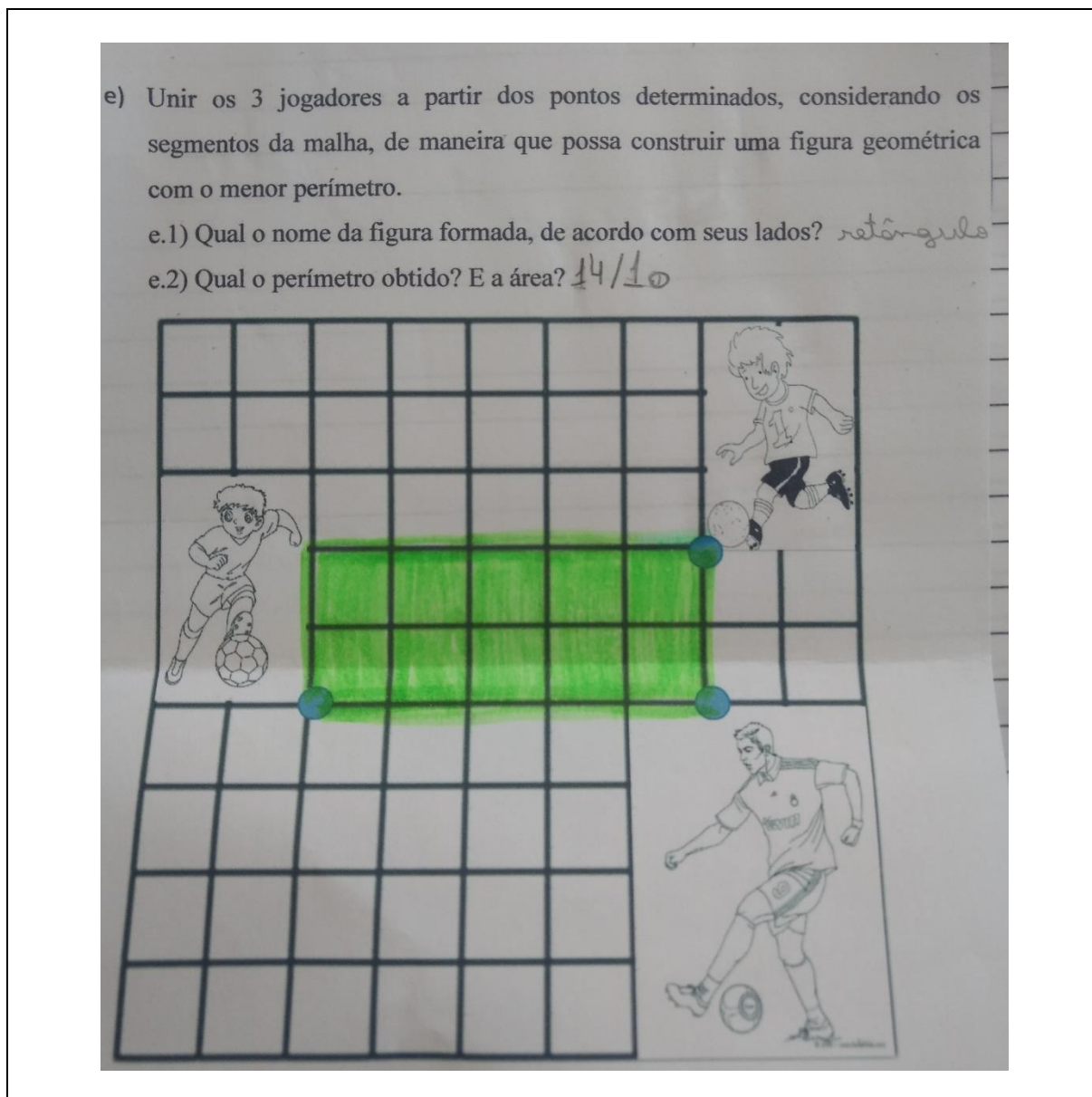
e) Unir os 3 jogadores a partir dos pontos determinados, considerando os segmentos da malha, de maneira que possa construir uma figura geométrica com o menor perímetro.
e.1) Qual o nome da figura formada, de acordo com seus lados?
e.2) Qual o perímetro obtido? E a área?

The diagram shows a 10x10 grid. Three soccer players are positioned at the following coordinates (row, column): Player 1 at (3, 1), Player 2 at (3, 8), and Player 3 at (8, 8). Three blue dots are placed at (4, 2), (4, 7), and (8, 2). These dots represent the vertices of a rectangle that connects the three players with the minimum perimeter.

Fonte: Adaptação Carvalho e Pitombeira (2010, p. 150).

Nesta tarefa, o grupo V1 formou um retângulo, analisou os pontos para unir os jogadores e realizou os cálculos do perímetro, encontrando assim o perímetro menor, conforme solicitado. Durante a realização e a comprovação das estratégias para investigar a figura que teria o menor perímetro, os integrantes do V1 estavam entusiasmados e desinibidos. Foi notória a participação de todos, na resolução da atividade proposta. Na Figura 18, a resolução deste grupo.

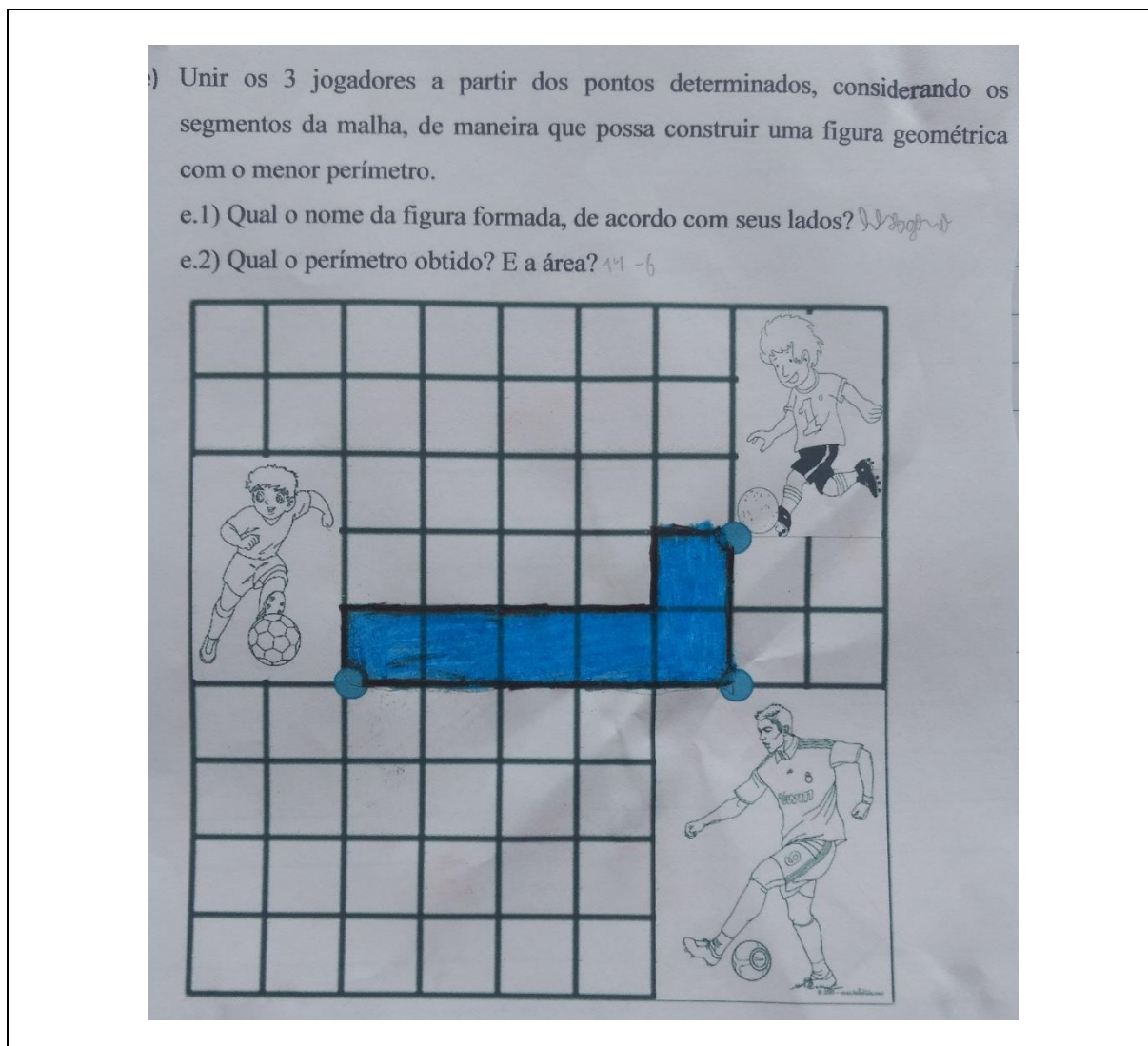
Figura 18 – Tarefa realizada pelo grupo V1



Fonte: Aluno M.

O grupo V2, para encontrar o menor perímetro unindo os jogadores, formou uma figura em formato de “L”, como podemos verificar na Figura 19. Este grupo elaborou várias estratégias para unir os jogadores. Após a construção de diversas figuras, os alunos calcularam o perímetro e confirmaram a figura tinha o menor perímetro, que era a com formato de “L”, cumprindo assim o objetivo da tarefa. Embora as figuras dos grupos V1 e V2 fossem distintas, o perímetro de ambos era igual.

Figura 19 – Tarefa realizada pelo grupo V2



Fonte: Aluno N.

Após cada grupo desenvolver a tarefa e chegar às suas conclusões, foi realizada a socialização no grande grupo, para apresentar as conjecturas elaboradas. Ao analisarem a figura geométrica que representava o caminho menor, o aluno N observou que os dois grupos encontraram o mesmo valor do perímetro, 14 unidades; porém, as figuras geométricas eram diferentes. Neste momento, questionei se as áreas das figuras também eram iguais. A seguir, o relato do diálogo que ocorreu no momento da socialização (FIGURA 20), entre a pesquisadora e os alunos do 5º ano.

Aluno N: “As figuras que desenhemos tem o mesma resposta, mas são diferente”.

Pesquisadora: “O que são diferentes?”

Alunos N: “As imagens”.

Pesquisadora: “As figuras geométricas são diferentes?”

Aluno N: “Sim, mas a resposta deu a mesma”.

Pesquisadora: “Qual resposta deu igual?”

Aluno M: “O perímetro”.

Pesquisadora: “E o valor da área também é igual?”

Aluno E: “Não. Na nossa figura tem 6 quadradinhos, na deles tem 10”.

Pesquisadora: “Então, temos duas figuras geométricas diferentes, com os valores das áreas diferentes, mas os valores dos perímetros são iguais”.

Aluna D: “De quem tá certo?”

Pesquisadora: “Qual das figuras vocês acreditam que está correta?”

Aluno M: “As duas, porque pedia o menor perímetro e as duas figuras deram 14 o contorno, então as duas estão certas”.

Aluno N: “É que pedia o menor perímetro e não a área. Se era a área era o nosso porque deu 6”.

Pesquisadora: “Tem outras formas geométricas que possam ser feitas para que o perímetro seja menor que 14 unidades?”

Silêncio. “Tentativas”.

Alunos: “Não”.

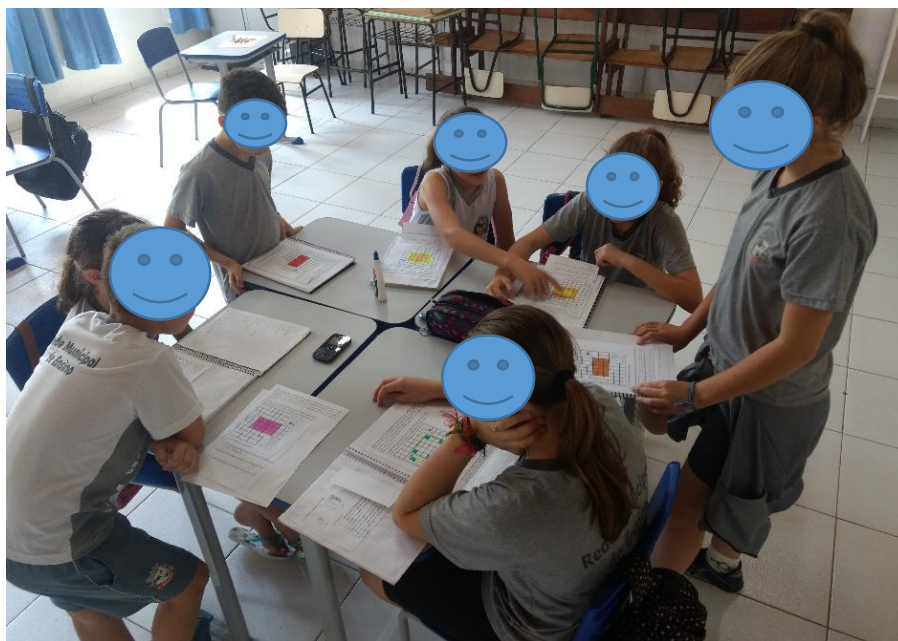
Pesquisadora: “O que vocês aprenderam com essa tarefa?”

Aluno N: “Que as figuras podem ser diferentes, mas podem ter o mesmo perímetro”.

Aluno S: “Também as áreas diferentes e os perímetros iguais”.

Aluno M: “Que existem formas geométricas diferentes, o número de quadradinho, que é a área também pode ser diferente, mas o perímetro, que é ao redor pode dar o mesmo valor”.

Figura 20 - Momento da Socialização da Tarefa 5



Fonte: Alunos do 5º Ano.

Na Figura 20, observamos o momento da socialização da tarefa, em que os grupos apresentam as conjecturas elaboradas aos colegas da turma. Nesta imagem, fica perceptível o companheirismo dos colegas, pois um auxiliou o outro, como também analisam as estratégias dos demais grupos, verificando que, nas tarefas investigativas, pode haver mais que uma resposta para a resolução da tarefa.

Durante a socialização, constatei que os alunos compreenderam a diferença entre

perímetro e área. O perímetro de uma figura é a soma de seus lados, o contorno. A área é o valor da superfície interna, neste caso, os quadradinhos. Ainda, os grupos salientaram que, ao multiplicar os lados de um quadrado ou de um retângulo, encontra-se o valor da área.

O diálogo também evidenciou o entendimento dos alunos de que não havia uma única maneira de construir a figura solicitada, ou seja, não havia apenas uma resposta. O diálogo ocorrido corrobora as palavras de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 41):

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação.

Considerando os relatos, acredito que a tarefa proporcionou momentos de aprendizagem. Por estarem mais familiarizados com essa metodologia, os alunos foram mais participativos na formulação das conjecturas e no momento da socialização, tornando assim a aula mais prazerosa. Durante a tarefa, para elaborar as estratégias, utilizaram a malha quadriculada, o traçado de figuras geométricas, a contagem de quadradinhos e de segmentos.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a discussão da investigação representa um momento de partilhar conhecimentos e estratégias utilizadas. Para os autores, a narrativa auxilia na discussão da atividade, uma vez que os alunos demonstram maior confiança ao argumentar e justificar suas ideias.

4.6 Tarefa 6: área e perímetro de figura irregular

A sexta tarefa teve como objetivo averiguar as estratégias que os discentes utilizam para calcular áreas e perímetros de figuras planas irregulares. Para realizá-la, os estudantes formaram dois grupos, que designei como J1 e J2. No Quadro 17, o enunciado da tarefa.

Quadro 17 - Tarefa 6: cálculos de áreas e perímetros de figuras planas irregulares

Tarefa 6: Deslocar-se até o pátio da escola e buscar a folha de uma árvore encontrada no chão. Calcular o perímetro e a área desta folha. Registrar os passos realizados.

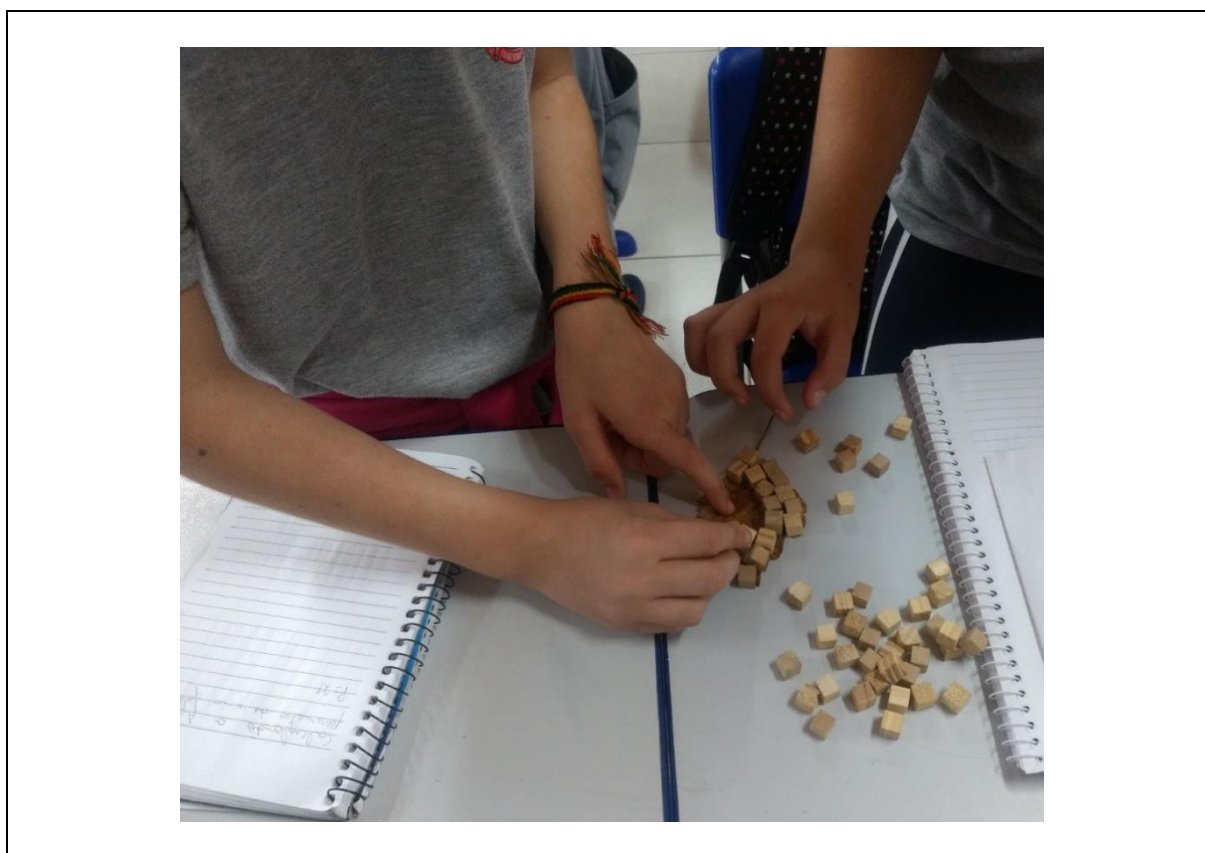
Fonte: Da autora (2020).

Esta tarefa trouxe um problema mais aberto, que desafiou os alunos a serem criativos para encontrarem estratégias para calcular a área e o perímetro de figuras planas irregulares. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), as tarefas de Investigação Matemática, quando são mais abertas, induzem o aluno a não pensar apenas numa única resposta, mas evidenciam

diferentes conjecturas, bem como os caminhos percorridos para encontrá-las.

Após buscarem as folhas no pátio da escola, os grupos tiveram dificuldades para descobrir estratégias e realizar a tarefa. Percebi que os grupos ficaram indecisos. O J1 solicitou os cubinhos do material dourado para realizar a tarefa. Na Figura 21, visualiza-se a estratégia utilizada pelo grupo para realizar o cálculo da área da folha recolhida. Eles colocaram os cubinhos sobre a folha até preenchê-la. Na sequência, contaram o número de cubinhos que coube na folha. Ao concluírem, solicitaram apoio como mostra o diálogo a seguir.

Figura 21 – Estratégia utilizada pelo grupo J1 para encontrar a área da tarefa 6



Fonte: Integrantes do grupo J1.

Aluna D: *“Profe encontramos o valor da área. Deu 31 cubinhos”*.

Pesquisadora: (Elogios para o grupo pela iniciativa e criatividade em colocar os cubinhos sobre a folha) *“Se pedisse a área em centímetros quadrados. Quantos centímetros representam esses 31 quadradinhos?”*

Grupo J1: *“Não sei”*.

Pesquisadora: *“Podemos encontrar a área dessa folha em centímetros quadrados?”*

Aluno D: *“Medindo os quadradinhos? Podemos medir os quadradinhos e somar”*.

Aluno E: (Mediu os cubinhos). *“Cada lado dos cubinhos mede 1. Então é um vezes um para saber a área de um quadradinho, né?”*

Aluno D: *“Que é um”*.

Pesquisadora: *“Muito bem. Então um cubinho tem aproximadamente 1 cm². Quantos centímetros quadrados terá a folha que vocês recolheram?”*

Grupo: *“31”*.

Pesquisadora: *“Isso, então podemos dizer que a área da folha que vocês recolheram*

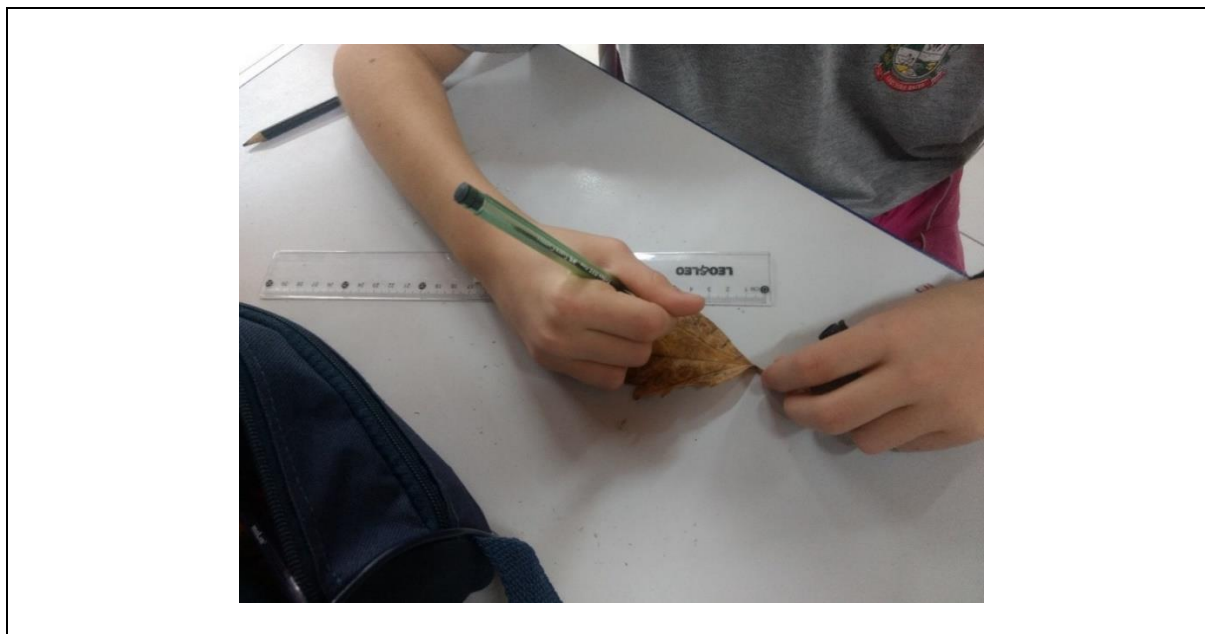
é de aproximadamente 31cm^2 ".

Apesar de os alunos ainda não estarem bem familiarizados com a unidade de medida usada para realizar o cálculo da área, neste caso, centímetros “quadrados”, ficou evidente, neste diálogo, o entendimento do grupo do conceito de área e a criatividade utilizada para descobrir o seu valor. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 49) ressaltam que:

Numa aula em que os alunos realizam investigações matemáticas, é muito provável, e desejável, que o professor raciocine matematicamente e de modo autêntico. Dada a natureza desse tipo de atividade, é muito natural que os alunos formulem questões em que o professor não pensou. De fato, é mesmo impossível antever todas as explorações que podem surgir a partir de uma tarefa matemática verdadeiramente aberta e estimulante.

O envolvimento e o interesse dos alunos superaram as expectativas ao realizarem esta tarefa. Apresento, a seguir, a Figura 22, que mostra a estratégia que o grupo utilizou para realizar o cálculo do perímetro. O grupo usou a régua e, marcando de centímetro em centímetro a superfície da folha, encontraram o perímetro aproximado de 24 centímetros.

Figura 22 - Estratégia utilizada pelo grupo J1 para encontrar o perímetro da tarefa 6

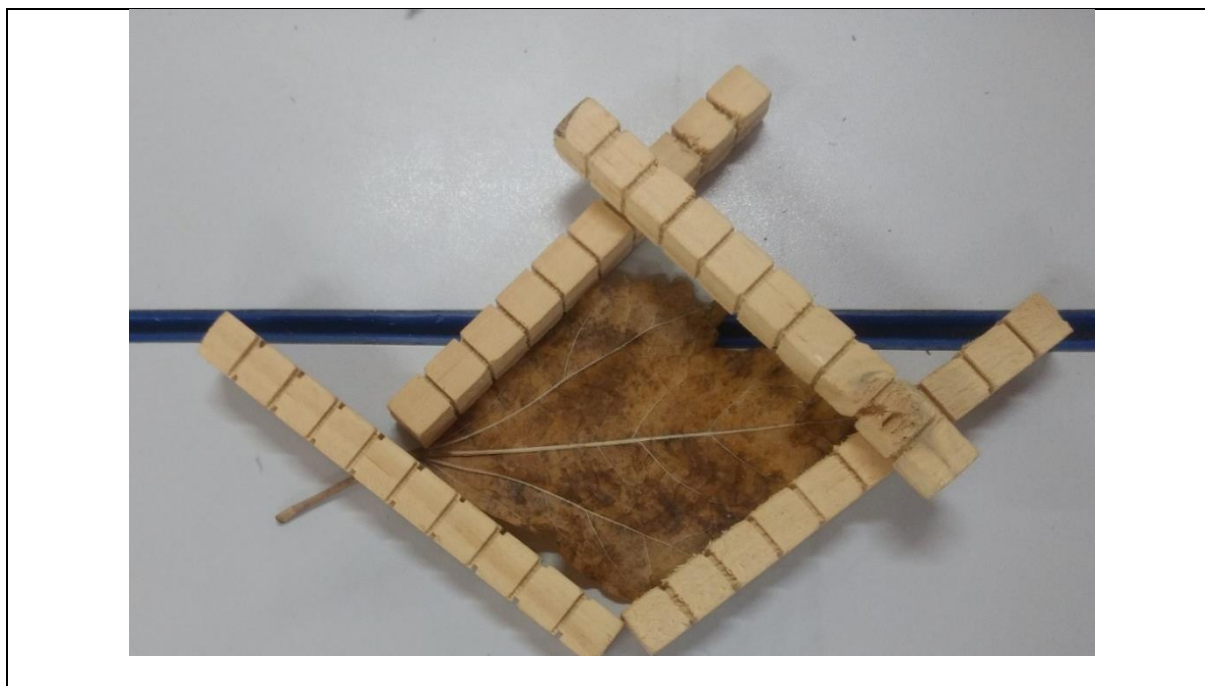


Fonte: Alunos do grupo J1.

O grupo J1, para encontrar o perímetro, também utilizou a estratégia de contornar a folha recolhida usando as barras das dezenas do material dourado, como ilustra a Figura 23.

Figura 23 – Outra estratégia do grupo J1 para encontrar o perímetro da tarefa 6



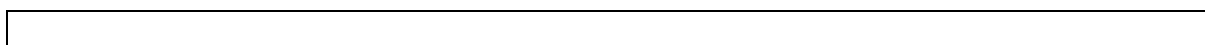


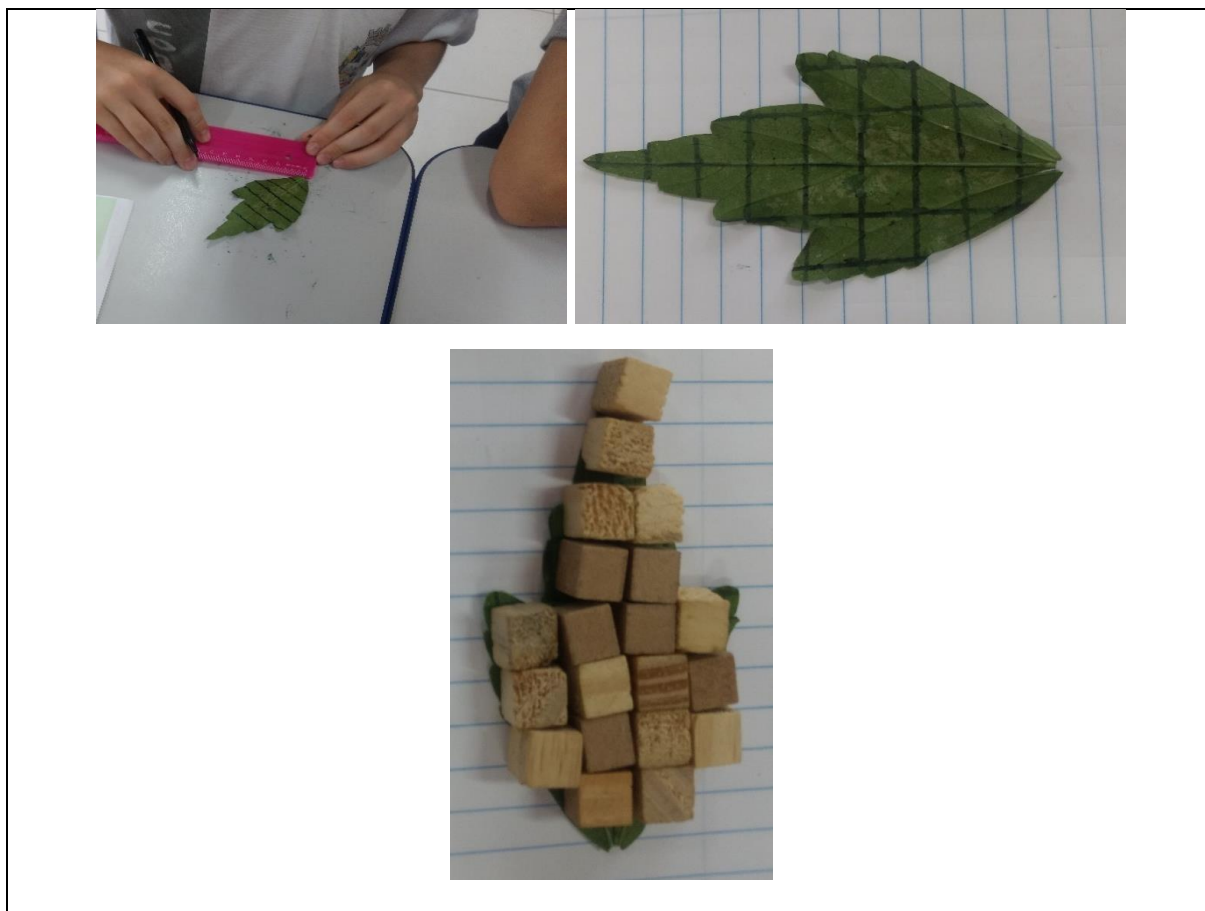
Fonte: Alunos do grupo J1.

Com esta estratégia, o grupo J1 encontrou, aproximadamente, 26 centímetros de perímetro. Ao analisar as duas estratégias, o grupo observou que as medidas dos perímetros se aproximavam; logo, poderiam utilizar os dois métodos para descobrir o valor do perímetro.

Analisando o diário de campo do grupo J2, observei que eles utilizaram como estratégia a marcação dos quadradinhos para o cálculo da área, traçando quadradinhos de um centímetro sobre a folha recolhida. Para contar os quadradinhos, primeiramente, contaram os inteiros, depois foram juntando os pedacinhos até formar aproximadamente um quadradinho inteiro. O resultado da área foi 20 quadradinhos, ou seja, 20 cm². Em seguida, solicitaram os cubinhos do material dourado, posicionando-os sobre a folha para verificar se a quantidade de cubinhos encontrada para a área condizia com o número de quadradinhos colocados sobre a folha. Ao se certificarem de que o valor da área encontrado era praticamente o mesmo, tanto no traçado como na colocação dos quadradinhos, calcularam o valor do perímetro, contando os quadradinhos que ficavam no contorno da folha recolhida. Na Figura 24, as estratégias utilizadas pelo grupo J2 para encontrar a área.

Figura 24 – Estratégias utilizadas pelo grupo J2, para encontrar o valor da área da folha colhida





Fonte: Alunos do grupo J2.

A seguir, o relatório dos alunos do grupo J2 referente a esta tarefa:

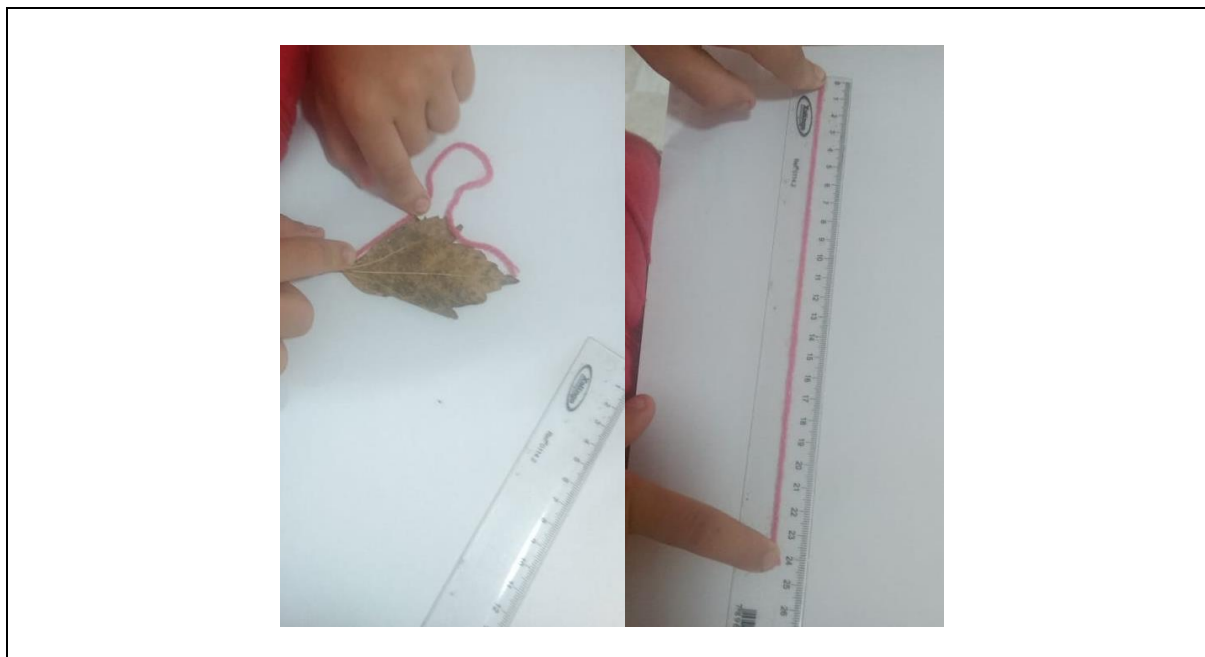
Depois de buscar a folha no pátio, ficamos pensando como a gente ia fazer para calcular a área. Então o aluno N teve a ideia de traçar os quadradinhos em cima da folha. Deu certo, só que teve quadradinhos que não ficaram cheios, então fomos juntando os pedacinhos dos lados até que dava um quadradinho, mais ou menos. Juntando todos os quadradinhos, os inteiros e os quebrados deu 20. Depois nós colocamos os cubinhos do material dourado em cima da folha, e deu 20, bem certinho. O perímetro nós contamos os quadradinhos ao redor da folha, cada segmento dos quadradinhos e deu 22 (ALUNOS INTEGRANTES DO GRUPO J2).

Durante a socialização, ao apresentarem as estratégias elaboradas para resolver a tarefa, percebi o envolvimento, a curiosidade e o interesse dos alunos. Também constatei a compreensão deles, do conteúdo estudado, pois sabiam a diferença entre área e perímetro. Apesar das formas diferentes de buscar o valor da área e do perímetro de figuras planas irregulares, percebi que, em momento algum, os grupos pensaram na possibilidade de encontrar o perímetro contornando a folha com um barbante e depois medir o comprimento com a régua.

Instiguei então os grupos a verificarem se o valor do perímetro seria o mesmo se fossem usar a estratégia do barbante. Na Figura 25 (à esquerda), a imagem do grupo J1 contornando a folha com o barbante para verificar o valor do perímetro. Na Figura 25 (à direita), os estudantes

medindo com a régua o valor do barbante.

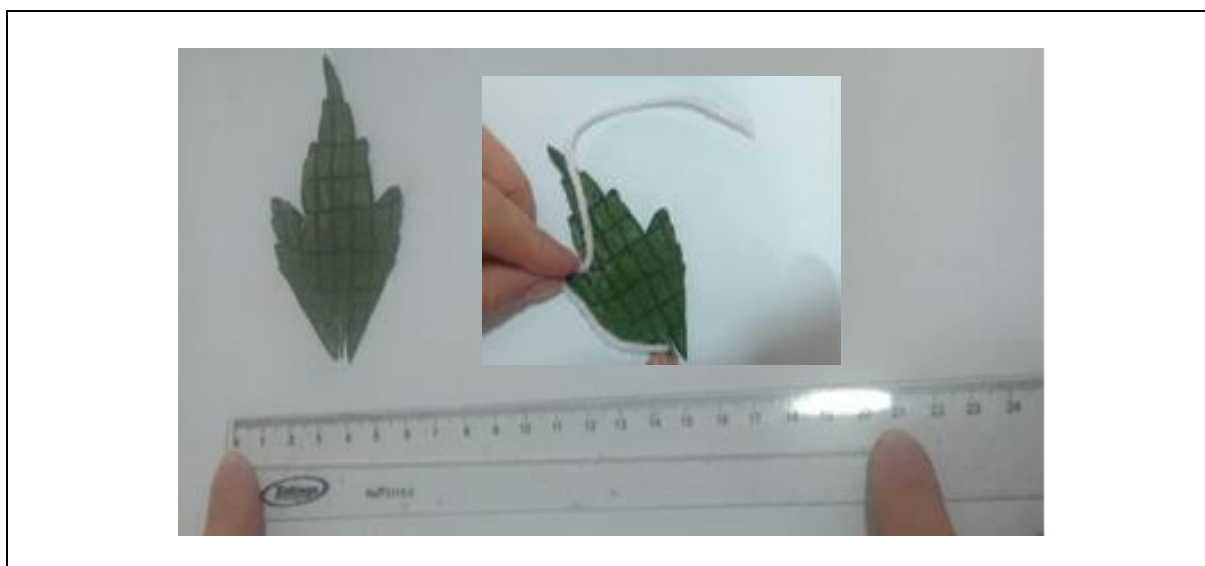
Figura 25 – Integrantes do grupo J1, verificando o perímetro com o barbante



Fonte: Alunos do grupo J1.

O grupo J2 também encontrou o valor do perímetro utilizando o barbante, como mostra a Figura 26.

Figura 26 - Integrantes do grupo J2, verificando o perímetro com o barbante



Fonte: Integrantes do grupo J2.

Tanto o grupo J1 como o J2, na estratégia do barbante, acharam valores aproximados aos obtidos com as próprias estratégias elaboradas. O J1 havia achado, para o perímetro, 24 cm e 26 cm; porém, na estratégia do barbante, encontrou 24 cm. O J2 havia obtido o valor de 22

cm; usando a estratégia do barbante, achou 21 cm.

Analisando as resoluções dos grupos, ressalto que o grupo J1 valeu-se do material dourado (cubinhos e barras), para fazer a contagem do cálculo da área e do perímetro. Já o grupo J2 elaborou sua estratégia traçando sobre a própria folha coletada, com o apoio da régua, quadradinhos de um centímetro, para efetuar o cálculo da área e do perímetro. Destaco que, ao desafiá-los a medir usando um barbante, os valores ficaram próximos aos obtidos a partir das estratégias usadas pelos grupos. Nesta atividade, os alunos estavam engajados, empenhados e participativos durante a execução da tarefa. Percebi a satisfação e a felicidade dos grupos ao encontrarem estratégias convincentes e válidas para determinar o valor do perímetro e da área da folha escolhida, demonstrando clareza e entendimento do conteúdo de área e de perímetro.

4.7 Tarefa 7: relação entre área e perímetro

Esta última tarefa teve por objetivo investigar estratégias utilizadas pelos alunos para comparar figuras com a mesma área, mas que podem ter perímetros diferentes e vice-versa. Para realizar a tarefa, deveriam construir as figuras, conforme o enunciado, com apoio de material concreto. A turma foi organizada em três grupos, nomeados como G1, G2 e G3, permanecendo cada discente com a mesma letra das tarefas anteriores. A seguir, no Quadro 18, a sétima tarefa.

Quadro 18 - Tarefa 7: figuras com a mesma área, mas com perímetros diferentes

Atividade 7: A primeira figura é formada por 3 peças quadradas⁶ e cada lado de cada peça quadrada mede 1 cm de lado. A segunda figura é formada pelo dobro de peças quadradas idênticas às da primeira figura. A terceira figura é formada pelo dobro de quadrados da figura anterior e assim, sucessivamente. Quanto mede o contorno, ou seja, quanto mede o perímetro da figura 4? E a área? Justificar a resposta.

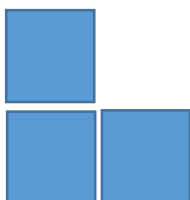


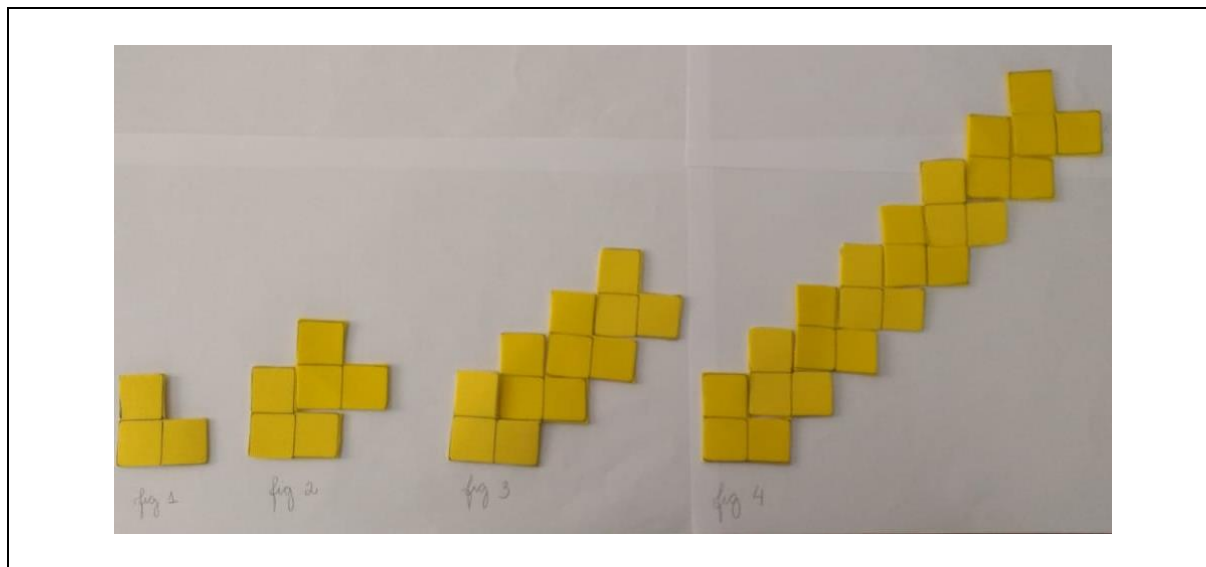
Fig. 1

⁶ Os grupos de estudantes receberam 45 peças quadradas em EVA, para realizar a tarefa 7.

Fonte: Adaptação (OBMEP, 2014).

Assim que o material concreto⁷ da tarefa foi entregue aos grupos, os alunos começaram a manuseá-lo para pensar em estratégias de como formar as figuras. Na Figura 27, a estratégia utilizada pelo grupo G1. Primeiramente, o grupo colocou as peças formando figuras, que, para eles, simbolizavam uma “escada”.

Figura 27 - Estratégia encontrada pelo grupo G1



Fonte: Alunos do grupo G1.

Ao concluírem as figuras, os alunos solicitaram se era possível construir um quadro para melhor organizar os dados. Obtendo uma resposta positiva, construíram um quadro e, ao finalizar, chamaram para verificar se estava correto. A seguir, no Quadro 19, as respostas do grupo G1.

Quadro 19 – Registro das estratégias do grupo G1

Figura	Peças	Total de quadradinhos - área	Perímetro
1	1	3	8
2	2	6	12
3	4	12	20
4	8	24	36

Fonte: Grupo G1.

Enquanto analisava o quadro, ocorreu o seguinte diálogo com o grupo G1:

⁷ O material em EVA, foi confeccionado pela professora/pesquisadora, o qual, ela trouxe pronto para a turma do 5º ano, manusear ao desenvolver e realizar a tarefa 7.

Pesquisadora: *“Analisando o quadro vocês saberiam dizer qual o número de peças da figura 5?”*

Aluno E: *“Teria 16”*.

Aluno L: *“Sim, 16 porque é o dobro”*.

Pesquisadora: *“Muito bem. E quantos quadradinhos?”*

Aluno L: *“16 vezes 3, porque cada figura tem 3 quadradinhos”* (os alunos realizam os cálculos 16 vezes 3).

Aluno P: *“Deu 48, mas acho que tá errado, porque deu muito”*.

Aluno E: *“Pra mim também deu 48”*.

Pesquisadora: *“Está correto. Se vocês observarem a tabela, existe outra forma de obter esse valor? De saber quantos quadradinhos terá a figura 5?”*

Silêncio.

Aluno E: *“É o dobro”*.

Pesquisadora: *“O dobro? O dobro de que?”*

Aluno E: (Mostrando na tabela com o dedo) *“Olha aqui: na primeira linha deu 3, na segunda deu 6, que é o dobro de 3, na terceira linha deu 12, que é o dobro de 6, na quarta linha deu 24, que é o dobro de 12, na quinta linha deu 48, que é o dobro de 24. Entendeu?”*

Pesquisadora: *“Ótima observação. Então podemos verificar a quantidade de quadradinhos calculando o dobro do valor anterior?”*

Aluno E: *“Isso”*.

Pesquisadora: *“Vamos analisar o valor do perímetro. O que podemos concluir? Tem alguma regrinha que podemos seguir?”*

Silêncio.

Pesquisadora: *“Qual o valor do perímetro na primeira figura?”*

Grupo G1: *“8”*.

Pesquisadora: *“E qual o valor do perímetro da segunda figura?”*

Grupo G1: *“12”*.

Pesquisadora: *“Quanto aumentou o perímetro da figura 1 para a figura 2?”*

Aluno P: *“4”*

Pesquisadora: *“E da figura 2 para figura 3, quanto aumentou?”*

Aluno P: *“8”*.

Pesquisadora: *“E da figura 3 para a figura 4?”*

Aluno E: *“16, tá aumentando o dobro”*.

Pesquisadora: *“Como assim?”*

Aluno E: *“É o dobro. Na primeira linha aumentou 4 a mais, na segunda aumentou 8 a mais, na terceira linha aumentou 16 a mais, tá aumentando o dobro em cada linha”*.

Pesquisadora: *“Parabéns Aluno E. Então podemos dizer que o perímetro é o valor da linha anterior adicionada ao dobro da diferença entre os dois últimos resultados encontrados”*.

Aluno E: *“Isso”*.

Pesquisadora: *“Então podemos encontrar o valor da figura 6 e 7, sem ter as peças?”*

Aluno E: *“Sim, na segunda coluna é só fazer o dobro, na terceira coluna também é só fazer vezes dois, o dobro e na outra coluna fazer $36 + 16$ ”*.

Neste diálogo, percebi que, ao resolver a tarefa solicitada com êxito, os alunos encontraram uma forma de descobrir os valores das demais figuras, sem o auxílio do material concreto. Neste sentido, instiguei os alunos a obterem os valores das próximas figuras, como podemos verificar na Figura 28. Tendo em vista a importância do papel do docente, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 36) salientam:

O professor precisa estar atento a todo processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir que os alunos vão evoluindo na realização da investigação. Desse modo, cabe-lhe colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão a fazer.

Neste sentido, acredito que exerci o papel de docente que acompanha o processo e intervém, se necessário, para garantir a evolução dos alunos na realização de investigações.

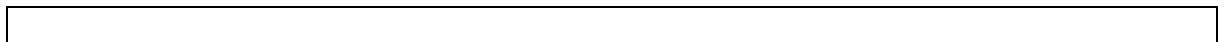
Figura 28 – Tabela construída pelo grupo G1

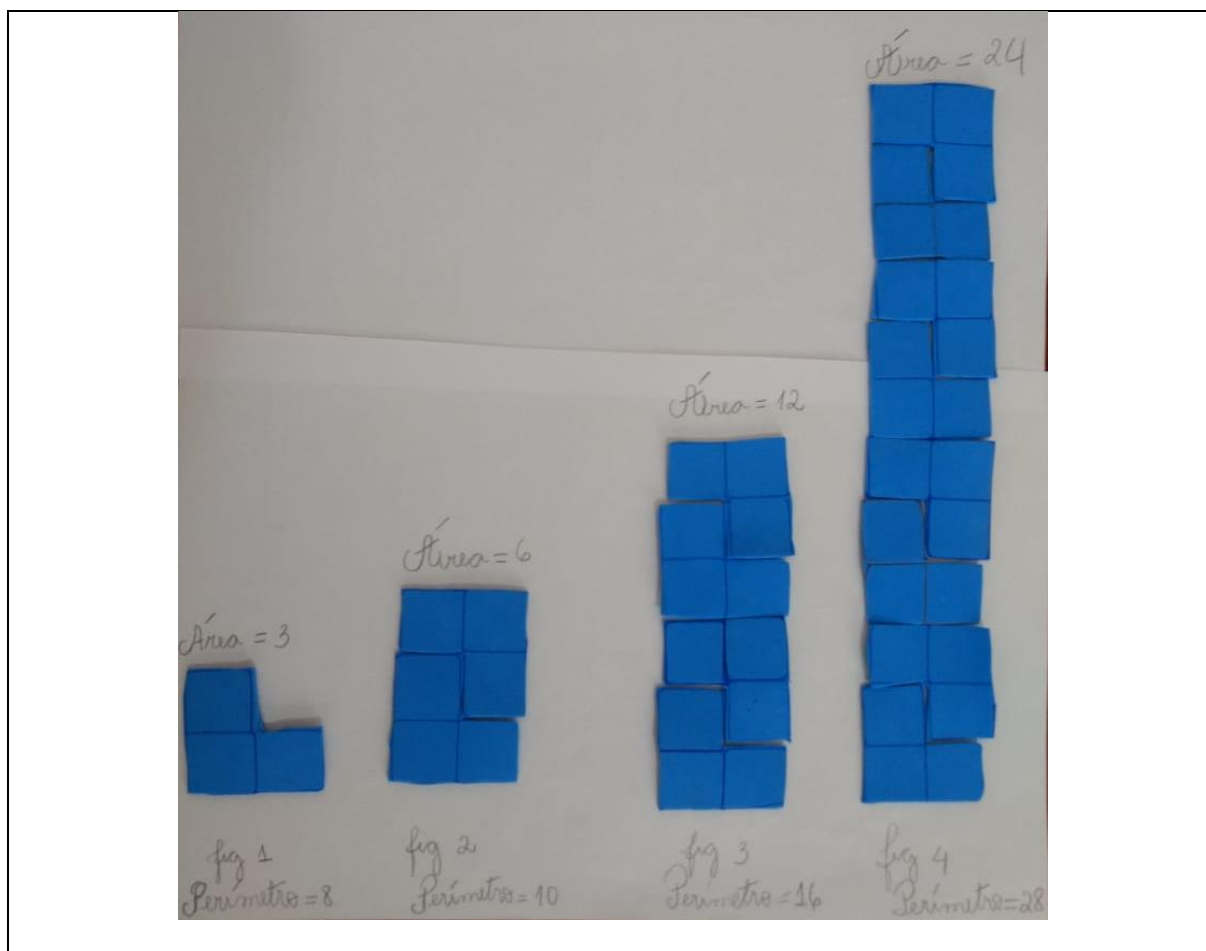
fig	peças	nº de quadradinhos	perímetro
1	1	3 x 2	8
2	2	6 x 2	12
3	4	12 x 2	20
4	8	24 x 2	36
5	16	48 x 2	68
6	32	96 x 2	132
7	64	192	260

Fonte: Aluno P.

Já o grupo G2, ao receber o material concreto, usou como estratégia, a formação de figuras que simbolizavam “retângulos”. Construíram as figuras e, próximo a cada uma delas, realizaram os cálculos, deixando registrados os valores da área e do perímetro de cada figura feita, conforme se visualiza na Figura 29.

Figura 29 – Estratégia utilizada pelo grupo G2





Fonte: Grupo G2.

Ao examinar o diário de campo do grupo G2 e fazer a leitura do relatório do grupo, observei que os alunos contaram os quadradinhos para obter o valor da área e, para o valor do perímetro, contaram os segmentos do contorno das figuras criadas. A seguir, o relatório feito por eles:

“Primeiro nós fizemos os desenhos, em forma de retângulos. Depois as continhas para ver a área e o perímetro. A área contamos os quadradinhos de cada figura e o perímetro contamos ao redor de cada figura. Depois vimos que o outro fez uma tabela, então pedimos ajuda pra profe pra fazer também. Na tabela ficou muito fácil para achar as respostas, porque era só fazer o número de peças vezes três para achar o valor da área. E para encontrar o valor do perímetro era preciso unir mais 4 unidades ao valor da área” (GRUPO G2).

Ao analisar o relatório, verifiquei que o grupo G2 também preferiu organizar os dados num quadro; porém, foi necessário meu apoio para iniciá-lo e organizá-lo. Ao registrarem os dados da área e do perímetro no quadro, o grupo percebeu que, a partir da segunda linha, era possível adicionar quatro unidades ao valor da área, para obter o perímetro. E, para obter a área, era possível multiplicar o número de peças por 3, pois cada peça tinha 3 quadradinhos. Neste sentido, os estudantes do grupo G2 foram desafiados a achar o valor das demais figuras, sem o

apoio de material concreto. Na Figura 30, o quadro com as respostas deste grupo.

Figura 30 – Quadro construída pelo grupo G2

	Peças	no de quadrados		Perímetro
1	1 x 3	3	$\rightarrow D+5$	8
2	2 x 3	6	$\rightarrow D+4$	10
3	4 x 3	12	$\rightarrow D+4$	16
4	8 x 3	24	$\rightarrow D+4$	28
5	16 x 3	48	$\rightarrow D+4$	52
6	32 x 3	96	$\rightarrow D+4$	100

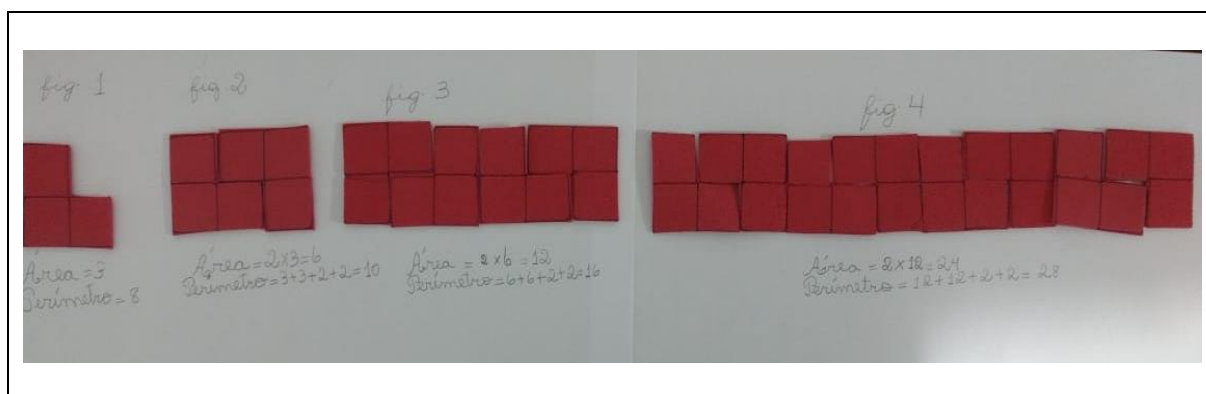
Fonte: Grupo G2.

A metodologia da Investigação Matemática faz com que o aluno seja ativo no processo de aprendizagem. Além disso, tarefas envolvendo Investigação Matemática têm um ponto de partida, mas não um caminho exato a ser seguido, nem um ponto de chegada predeterminado para a sua resolução. Nesta linha argumentativa, a Base Nacional Comum Curricular destaca que,

[...] na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem (BRASIL, 2018, p. 277).

Os alunos do grupo G3 também realizaram a tarefa e, com o apoio do material concreto, construíram as figuras representadas na Figura 31.

Figura 31 – Estratégia utilizada pelo grupo G3, para realizar a tarefa 7



Fonte: Grupo G3.

Este grupo também construiu retângulos, porém, em posições diferentes dos do grupo

anterior. Para calcular a área das figuras construídas, multiplicaram um lado do retângulo pelo outro e, para encontrar o perímetro, adicionaram os quatro lados do retângulo.

No momento da socialização, cada grupo apresentou suas estratégias ao grande grupo. Analisando os resultados, vários alunos observaram que, apesar de as figuras construídas pelos grupos serem diferentes, o valor da área era igual para todos. Também constataram que as figuras dos grupos G2 e G3 eram em formato de retângulos, porém estavam em posições opostas; assim o valor do perímetro encontrado pelos grupos G2 e G3 também era igual. Já o grupo G1 organizou as peças de forma diferente dos demais grupos; logo, achou um valor diferente para o perímetro. Em relação à área, concluíram que figuras diferentes podem ter áreas iguais.

Nessa fase, pode-se observar que há um entendimento maior do que realmente significa investigar, desenvolver a capacidade de comunicar-se matematicamente e de refletir sobre o trabalho realizado. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 41) acrescentam:

A fase da discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação.

Assim, atingiu-se o objetivo principal desta tarefa, que era compreender quais figuras com a mesma área podem ter perímetro diferente e vice-versa. Novamente, a participação dos alunos foi constante durante a execução da tarefa, principalmente, no momento da socialização, quando demonstraram felicidade e satisfação por terem conseguido realizá-la com eficiência. Em relação às estratégias, os alunos usaram material concreto para construir as figuras, no caso, as peças de EVA. Também criaram quadros para melhor organização dos dados e cálculos. Com o passar dos encontros, os discentes sentiram-se mais seguros para elaborar as estratégias e trocaram ideias com os colegas do grupo, para, juntos, conseguirem elaborar as conjecturas. Observaram que era diferente o valor do perímetro das figuras com formato diferente; porém, o valor a área era igual.

No Quadro 20, uma síntese das sete tarefas realizadas no decorrer desta prática pedagógica, relacionando as conjecturas e estratégias usadas pelos alunos na realização das tarefas, as dificuldades observadas no decorrer da prática, bem como os avanços superados pelos estudantes.

Quadro 20 - Síntese das 7 tarefas realizadas na prática pedagógica

Tarefa	Estratégias e ou conjecturas	Dificuldades	Avanços
1 - Construção de um cubo com os cubinhos disponibilizados.	<ul style="list-style-type: none"> - construção do cubo com o material dourado; - pintura das faces externas dos cubinhos; - elaboração de fórmulas por meio da multiplicação e da adição. 	<ul style="list-style-type: none"> - trabalhar em grupo. - elaborar estratégias. - demora em realizar as tarefas; - determinar a quantidade de cubinhos necessários para construir um cubo; - expor as estratégias encontradas. 	
2 - Sequência de sólidos geométricos.	<ul style="list-style-type: none"> - construção de sólidos usando a ideia de adição e ou de multiplicação para a sequência. 	<ul style="list-style-type: none"> - desenho da planificação; - trabalho em grupo. 	<ul style="list-style-type: none"> - elaborar as conjecturas; - testar as conjecturas e ter êxito; - verificar que na metodologia de investigação matemática podemos ter mais de um resultado.
3 - Auxílio a uma pessoa para realizar um trajeto.	<ul style="list-style-type: none"> - descrever por escrito o trajeto solicitado, dramatizando-o; - desenhar o trajeto solicitado. 	<ul style="list-style-type: none"> - escrever informações precisas, para realizar o percurso solicitado. 	<ul style="list-style-type: none"> - comprometimento, participação e socialização durante a realização da tarefa no trabalho em grupo.
4 - Construção de peças em formato de polígonos a partir de dobraduras.	<ul style="list-style-type: none"> - uso de dobraduras; - uso de réguas para desenhar triângulos; - recorte de dobraduras. 	<ul style="list-style-type: none"> - realização das tarefas com dobraduras; - faltou a ideia de desenhar um triângulo com ângulo reto, para obter peças com outros formatos; - elaborar conjecturas; - expressar-se matematicamente. 	<ul style="list-style-type: none"> - conclusão de “fórmulas” simples; - trabalho cooperativo.
5 - Nomenclatura de polígonos e medidas de áreas e perímetros.	<ul style="list-style-type: none"> - desenho de figuras geométricas planas. - contagem de quadradinhos para realizar o cálculo da área e de segmentos para realizar o cálculo do perímetro. 	<ul style="list-style-type: none"> - distinguir o conceito de áreas e perímetros. 	<ul style="list-style-type: none"> - evolução na socialização do trabalho grupo. - elaboração de fórmulas para cálculo de áreas e perímetros. - melhora em expressar-se matematicamente. - percepção de que figuras com formato diferente podem ter valores diferentes para o perímetro, mas valores iguais para áreas.

(Continua...)

(Conclusão)

Tarefa	Estratégias e ou conjecturas	Dificuldades	Avanços
6 - Cálculos de áreas e perímetros de figuras planas irregulares.	<ul style="list-style-type: none"> - uso do material dourado para realizar o cálculo da área e do perímetro; - uso da régua sobre a folha para desenhar os quadradinhos. 		<ul style="list-style-type: none"> - alunos ativos, mais participativos e confiantes em argumentar e justificar suas estratégias.
7 - Construção de sequências e cálculo de perímetro e área.	<ul style="list-style-type: none"> - material em eva para formar as figuras; - construção de quadros para organizar dados. 	<ul style="list-style-type: none"> - organização dos dados em um quadro. 	<ul style="list-style-type: none"> - percepção de que figuras com formato diferente podem ter valores diferentes para o perímetro, mas valores iguais para áreas; - momentos de debates na socialização com precisão, analisando os diferentes resultados; - troca de ideias nos grupos.

Fonte: Da autora (2020).

No próximo capítulo, apresento as considerações finais da pesquisa e da prática efetivada. Destaco as diferentes estratégias emergentes durante as tarefas investigativas com o intuito de responder ao questionamento inicial e apresento colocações em relação aos objetivos específicos propostos.

5 CONSIDERAÇÃO FINAIS

Nesse capítulo, sintetizo os principais resultados desta pesquisa, que teve como objetivo analisar estratégias e conjecturas elaboradas por alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental ao realizarem tarefas investigativas, envolvendo o trabalho coletivo, abrangendo a unidade temática Geometria. As tarefas desenvolvidas com os estudantes proporcionaram-lhes a oportunidade de trabalhar de forma investigativa. Destaco que, como professora, também foi um modo diferenciado de desenvolver os conteúdos matemáticos em sala de aula, saindo da maneira sistemática com que os trabalhava na disciplina de Matemática. Procurei abandonar os exercícios repetitivos e optei por trabalhar com atividades em que os alunos precisam construir, descobrir, argumentar, ou seja, participar da construção do seu conhecimento.

Contudo, a Investigação Matemática, sendo uma metodologia mais aberta, possibilita aos discentes, maior liberdade para seguirem o próprio caminho, em busca de soluções para as situações propostas. No presente trabalho, procurei desenvolver os seguintes objetivos específicos: explorar tarefas investigativas com foco na Geometria para proporcionar a troca de ideias entre os alunos, a interação e o trabalho coletivo; identificar conjecturas e estratégias elaboradas pelos estudantes do 5º ano, ao realizarem tarefas investigativas envolvendo conceitos geométricos.

Quanto ao primeiro objetivo, disponibilizei, ao longo de toda a prática pedagógica, sete tarefas, realizadas em 8 encontros, usando, em média, duas horas por encontro. Nas primeiras, os alunos apresentaram dificuldades em trabalhar em grupo. Esse fato foi evidenciado, pois, ao entregar as tarefas aos grupos, cada um procurava resolver individualmente a questão, ou então esperavam que um fizesse para os demais copiarem.

Diversas vezes, ao entregar as tarefas aos grupos, foi necessário salientar a importância de discutirem e lerem as questões em grupo, não individualmente. Expliquei-lhes que o trabalho em grupo, além de ser uma forma coletiva de construir o conhecimento, é troca, é ajuda mútua. Também insisti que todos os integrantes expusessem suas ideias, suas estratégias aos demais colegas e que juntos discutissem e chegassem a uma conclusão. No decorrer dos encontros, percebi que o trabalho cooperativo evoluiu, tornando-se importante, pois foi notório o auxílio, a cooperação entre colegas nos grupos de trabalho. Passaram a elaborar estratégias, conversando, interagindo e colaborando com todos os integrantes do grupo.

O trabalho em grupo possibilitou que os educandos desenvolvessem e exercitassem habilidades como decidir, debater e respeitar. Durante as tarefas, os alunos foram expostos à construção coletiva do conhecimento, que possibilitou a troca de estratégias entre os colegas e o contato com percepções distintas. Além disso, desenvolveram a capacidade de ouvir e de respeitar opiniões diferentes, permitindo que, ao finalizar a tarefa, em conjunto, alcançassem o objetivo proposto. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 30) acrescentam que “o trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa”.

Em relação ao segundo objetivo, acredito que, com a aplicação da metodologia de Investigação Matemática, os alunos tiveram a oportunidade de descobrir relações, expressar e defender suas opiniões. As tarefas possibilitaram identificar e encontrar estratégias, comprovar, testar e apresentar os resultados, reforçando atitudes de autonomia, de cooperação e de capacidade de comunicação oral e escrita.

Nas primeiras tarefas realizadas, os alunos apresentaram certas dificuldades para entendê-las, uma vez que ficavam olhando sem saber o que fazer, por não estarem acostumados com esse tipo de metodologia e esperavam que a professora desse um exemplo para iniciar a tarefa. Tive o cuidado de, no decorrer das atividades envolvendo a Investigação Matemática, não dar respostas prontas ao aluno. Procurava exercer o papel de mediadora, instigando os estudantes a pensarem e a discutirem as distintas estratégias e conjecturas. Quando solicitavam auxílio para a realização das tarefas, questionava-os acerca do que já haviam conjecturado, instigando-os a estabelecerem novas relações. Ao formularem uma estratégia diferenciada, elogiava-os e os apoiava, deixando-os assim mais motivados e seguros.

Para elaborar as estratégias, os estudantes utilizaram o material dourado, dobraduras e recortes, construção de sólidos, pinturas, régua, bem como construíram “fórmulas” e quadros

para melhor organizar os dados. Acredito que o material concreto tenha contribuído para a elaboração das estratégias, estimulado o pensamento lógico-matemático e influenciado na construção do conhecimento. O material concreto serviu como mediador, facilitando a construção do conhecimento e a compreensão dos conceitos matemáticos. O material concreto despertou a curiosidade do aluno, estimulando-o a fazer questionamentos, a criar hipóteses e a chegar às próprias soluções, enfim, a aventurar-se pelo mundo da matemática de forma mais prazerosa.

A fim de elaborar as estratégias para resolver as tarefas, os estudantes utilizaram material concreto. Na tarefa que envolvia os sólidos geométricos, o auxílio do material dourado possibilitou uma melhor compreensão do conceito e da construção dos cubos, ao perceberem a quantidade de cubinhos necessários para a construção de cada cubo, como também conseguiram analisar o número de faces coloridas dos cubinhos. Ainda, com o apoio do material dourado, foi possível entender melhor os conceitos de área e perímetro. Percebi que a construção de quadros para organizar os cálculos, elaborados no decorrer das tarefas, contribuiu para melhor compreender os conteúdos estudados, pois, através dos quadros, os alunos conseguiam concluir algumas “fórmulas”, que facilitaram a resolução da tarefa.

O manuseio de dobraduras e recortes possibilitou compreender o conceito de algumas figuras geométricas, como os diferentes tipos de triângulos, dependendo da forma como realizavam o corte para obter as demais figuras geométricas. Era necessário analisar a maneira como dobravam, a quantidade de dobras e a maneira como realizavam o corte. As peças de Eva também foram elementos importantes para seguir uma sequência na construção de figuras, pois, através das figuras formadas, os estudantes compreenderam que diferentes figuras podem ter o mesmo valor para a área, mas valores diferentes para o perímetro e vice-versa.

No final de cada tarefa, os estudantes tiveram a oportunidade de apresentar aos demais grupos as estratégias elaboradas, o que favorecia debates e discussões. Os alunos foram chamados a agir como matemáticos, não só na formulação de questões, conjecturas, provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.

A metodologia da Investigação Matemática corrobora a Base Nacional Comum Curricular (2018), a qual propõe que o estudo da matemática não deve ser reduzido à apropriação de um aglomerado de conceitos. O estudante deve ser motivado, em seu percurso

escolar, a questionar, a formular, a testar e a validar hipóteses, buscar contraexemplos, modelar situações, verificar a adequação da resposta a um problema, desenvolver linguagens e, como consequência, construir formas de pensar que o levem a refletir e a agir de maneira crítica em relação a questões com as quais ele se depara em seu cotidiano (BRASIL, 2018).

A Investigação Matemática revelou ser uma metodologia que exigiu tanto do educando quanto de mim, professora, porém os resultados foram compensadores. Nesse sentido, Alro e Skovsmose (2010) colocam que “o professor tem que desafiar, mas também estar preparado para ser desafiado”. Esta prática, foi um desafio, para mim enquanto docente, pois estava acostumada com aulas em que planejava alguma atividade e instruía os alunos ao longo do processo, sabendo exatamente onde ela ia levar e que objetivos alcançaria. Ao desenvolver esse trabalho, senti-me desafiada. Conforme Skovsmose (2008, p. 37), “qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente”. Como professora, procurei desafiar-me na tentativa de desenvolver tarefas novas que exigissem uma postura diferente da habitual, em sala de aula, além de problematizar e disseminar uma metodologia que é pouco praticada.

Acredito que a metodologia de Investigação Matemática, por ser uma metodologia em que o aluno constrói seu próprio conhecimento, tendo a oportunidade de pesquisar, descobrir, criar, questionar, elaborar estratégias, argumentar, socializar suas ideias com a turma, poderia ser inserida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Dessa forma, os alunos já desenvolvem o raciocínio lógico desde este nível de escolaridade.

Considerando os resultados produtivos encontrados nesta pesquisa, pretendo continuar desenvolvendo, durante minhas aulas, práticas pedagógicas diferentes, que oportunizem aos estudantes, dialogar e expressar mais suas ideias. Ademais, tenho intenção de dar continuidade a este trabalho, aprofundando esta pesquisa, num curso de Doutorado, em particular procurando encontrar o equilíbrio entre as diferentes tendências e metodologias para o ensino de Matemática nos Anos Iniciais.

Faço agora o fechamento de uma etapa, que, em parte, respondeu a algumas de minhas inquietações e preocupações que me acompanharam ao longo da minha trajetória profissional. Termina a escrita desta dissertação com a certeza de que ser pesquisador e professor é estar constantemente em conflito, com inquietações.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, P. Investigações em Geometria na sala de aula. *In*: ABRANTES, P. *et al.* (org.) **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf. Acesso em: 2 fev. 2019.
- ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Autêntica, 2006.
- ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- AMARAL-SCHIO, R.; BARDINI, L.; MAZZI, L. Aspectos do cotidiano e a geometria nos livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. **Educação Matemática Sem Fronteiras**: Pesquisas em Educação Matemática, [S.l.], v. 1, n. 1, p. 61-76, 24 abr. 2019. Disponível em: <https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/EMSF/article/view/10642/7125>. Acesso em: 27 jul. 2020.
- BARBOSA, J. M. O estudo da Geometria. **Revista Brasileira de Cartografia**, Rio de Janeiro, n. 3, 2008.
- BOMTEMPO, Kênia. **Pequeno construtor**: cenário de investigação para o estudo da Geometria. 2009. 151f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2009. Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFG_2d78dc1253ed6118ab453a6ea56ce096. Acesso em: 29 jan. 2019.
- BRASIL, Secretaria de educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 2018.
- BRAUMANN, C. Divagações sobre Investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. *In*: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIEGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. **As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

BRUM, M. G. N. **Atividades investigativas para o ensino de matemática para alunos de 5ª série do Ensino Fundamental**. 2012. 127f. Dissertação (Mestrado Profissional – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012. Disponível em:

<http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/dissertacao%20-%20maria%20gorete.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2019.

CARVALHO, Fernandes de; PITOMBEIRA, João Bosco (coord.). **Matemática: Ensino Fundamental**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

COLEÇÃO TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Tradução de Orlando Fonseca. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

FAINGUELERNT, Estela K. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade na pesquisa científica**. Campinas: Papirus, 2015.

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat 99**, Lisboa: APM, 1999. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm>. Acesso em: 23 mar. 2019.

FONSECA, H.; ABRANTES, P. **Investigações em Geometria Realizadas pelos Alunos**. 1999. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto5.PDF>. Acesso em: 02 fev. 2019.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat 99**. Lisboa: APM, 2004.

GIONGO, M. I.; MUNHOZ, A. V. (org.) **Observatório da Educação I: Tendências no ensino da matemática**. Lajeado: Editora Evangraf, 2014.

GIONGO, M. I.; MUNHOZ, A. V. (org.) **Observatório da Educação II: Experiências curriculares no ensino de matemática na escola básica**. Lajeado: Editora Evangraf, 2016.

GIONGO, M. I.; MUNHOZ, A. V. (org.) **Observatório da Educação III: Práticas pedagógicas na educação básica**. Porto Alegre: Ed. Criação Humana/ Evangraf, 2017.

GUILLEN, Juliane Dias. A importância do Ensino de Geometria nas séries iniciais: Compartilhando a experiência com professores. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Retrospectivas e Perspectivas. **Anais do XI ENEM**. Curitiba, 2013.

HONORATO, A. *et al.* A vídeo-gravação como registro, a devolutiva como procedimento: pensando sobre estratégias metodológicas na pesquisa com crianças. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 29., 2006, Caxambu. **Anais [...]**, Caxambu: ANPEd, 2006.

JOHANN, Jorge Renato (coord.). **Introdução ao método Científico: conteúdo e forma do conhecimento**. Canoas: Ed. ULBRA, 1997.

KLUPPEL, G. T.; BRANDT, C. F. **Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à Luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval**. In: IX ANPED SUL. SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL. [S.l.], 2012.

KRUG, Fernanda. **A ludicidade no ensino da matemática no município de Luzerna/SC**. 2016. 49f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Catarinense, Videira. 2016.

LOIZOS, P. Vídeo, filme e fotografias como documentos de pesquisa. In: BAUER, M. W.; GASKELL, G. (orgs.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 137-155.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista. **Geometria. SBEM**, Blumenau, ano 3, n. 4, 1. semestre, p. 03-13, 1995. Edição especial.

LORENZATO, Sérgio. O laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sergio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores associados, 2006.

LORENZATO, Sérgio. **Educação infantil e percepção matemática**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2011. (Coleção Formação de Professores).

MACCALI, Ludmila. **Atividades investigativas para o ensino da álgebra em turmas de 7º ano e 9º ano do Ensino Fundamental**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, RS, maio 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/1713>. Acesso em: 28 jan. 2019.

MACEDO, J. C. **A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de Geometria no 8º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS: UFGD, 2013.

MALDANER, Anastácia. **Educação matemática: fundamentos teórico-práticos para professores dos anos iniciais**. Porto Alegre: Mediação, 2011.

MARIANI, Mateus. **Cartografia e Investigação Matemática: possibilidades para uma intervenção pedagógica com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental**. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, RS, jun. 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/1713>. Acesso em: 28 jan. 2019.

MARTINS, Isa Maria dos Reis Correia. **O raciocínio matemático em atividades de investigação numa turma do 5º ano do Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado em Didática e Inovação no Ensino das Ciências; Área de Especialização de Matemática) – Universidade do Algarve Faculdade de Ciências e Tecnologia, Faro, 2010. Disponível em: <https://www.anais.ueg.br/index.php/seminariodelicenciaturascceh/index>. Acesso em: 26 mar 2019.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação na sala de aula**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglioni. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: Tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglioni. **A Geometria nas séries iniciais**: Uma análise sobre a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdFSCar, 2003.

OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS - OBMEP. **10ª Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas**. [S.l.], 2014. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2014.pdf. Acesso em: 10 jun. 2019.

PASSINI, Elza Yasuro. **Alfabetização Cartográfica e o livro didático**: Uma análise crítica. Belo Horizonte: Editora Lê, 1994.

PASSOS, C.M.B. **Representações, interpretações e prática pedagógica**: A Geometria na sala de aula. 2000. 398f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, n. 1, 1993.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender Geometria? *In*: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, São Paulo. **Anais [...]**, São Paulo: USP, 2004.

Disponível em:

http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21Regina.doc. Acesso em: 6 mar. 2019.

PEREIRA, Ademar Barros. **Investigação Matemática**: possibilidade para ensino de trigonometria. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, RS, dez. 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/340>. Acesso em: 29 jan. 2019.

PEREZ, G. **Pressupostos e Reflexões Teóricas e Metodológicas da Pesquisa**. Tese (Doutorado) – UNICAMP, Campinas, 1991.

PIASESKI, Claudete Maria. **A Geometria No Ensino Fundamental**. 2010. Monografia (Graduação) – Licenciatura em Matemática no Curso de Matemática, Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI, Erechim, 2010. Disponível em: http://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1271.pdf. Acesso em: 03 mar. 2019.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RABAIOLLI, Leonice Ludwig. **Geometria nos anos iniciais**: Uma proposta de formação de professores em cenários para investigação. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, RS, 13 jul. 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/340>. Acesso em: 29 jan. 2019.

RIESS, Maria Luiza Ramos. **Trabalho em Grupo**: Instrumento Mediador de Socialização e Aprendizagem. 2010. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/35714>. Acesso em: 14 ago. 2020.

RIOS, Ricardo Bahia; MENDES, Julyend Silva. **Alfabetização Cartográfica**: práticas pedagógicas nas séries iniciais. In: 10º ENCONTRO NACIONAL DE PRÁTICA DE ENSINO EM GEOGRAFIA. [S.l.], 2009. Disponível em: <http://www.agb.org.br/XENPEG/artigos/GT/GT6/tc6%20%288%29.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2020.

SALES, Cássia; MEDINA, Denise. O que e como ensinar geometria nas séries iniciais? Salvador, BA, 7 a 9 de julho de 2010. **Anais do X ENEM**, Salvador, BA, 2010. Disponível em: <http://ava2.unitins.br/ava/files/projetoconteudo/eec3633ba26bc9b127a46fefde5426.html>. Acesso em: 26 fev. 2016.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S. A prática pedagógica em geometria nos primeiros anos do ensino fundamental: construindo significados. **Revista Valore**, Volta Redonda, v. 3, n. 1, p. 388-407, jan./jun. 2018. Disponível em: <https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/download/85/102>. Acesso em: 27 jul. 2020.

SCHMITT, Fernanda Eloisa. **Abordando Geometria por meio da Investigação Matemática**: Um comparativo entre o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, maio 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/831>. Acesso em: 28 jan. 2019.

SCHNEIDER, Daisy. **Modelo Pedagógico para o desenvolvimento de competências de professores e tutores para educação a distância**. 2011. Projeto de Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2011.

SKOVSMOSE, Ole. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2015.

SOUZA, Larissa Ferreira de. O diário de campo: a importância da reflexão na prática docente. In: SEMINÁRIO DE LICENCIATURA DO CAMPUS DE CIÊNCIAS SOCIOECONÔMICAS E HUMANAS, 2014. **Anais do Seminário de Licenciatura do Campus de Ciências Socioeconômicas e Humanas**, [S.l.], 2014. Disponível em: <https://www.anais.ueg.br/index.php/seminariodelicenciaturascseh/index>. Acesso em: 21 jun. 2019.

TURRIONI, Ana Maria Silveira. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores**. 2004. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, Rio Claro, SP, 2004. p. 163.

YIN, Roberto K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 2. ed. Porto Alegre. Editora: Bookmam. 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Declaração de Anuência da escola e consentimento da turma para realizar a prática pedagógica

DECLARAÇÃO

Declaro que autorizo a mestranda da Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, de Lajeado, Joseane Marta Vian, a usar o nome da Escola Municipal de Ensino Fundamental Heitor Villa-Lobos, de Coqueiro Baixo, RS, durante o curso de Mestrado, assim como realizar sua investigação junto aos alunos de 5º ano de Ensino Fundamental nesta mesma escola. A investigação prevê práticas pedagógicas com os alunos mencionados, durante o primeiro semestre de 2020, na escola, em horários a serem acordados, de modo a não interferir nas atividades de rotina da Instituição. A Escola e os alunos não se responsabilizarão por despesas decorrentes da pesquisa.

Coqueiro Baixo, junho de 2019.

Diretora

Carimbo

APÊNDICE B - Modelo de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Pelo presente Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, declaro que autorizo a participação de meu/minha filho/a na pesquisa denominada, “**Tarefas investigativas para o ensino da geometria no 5º ano do Ensino Fundamental**”, na Escola Municipal Heitor Villa Lobos, pois fui informado/a, de forma clara e detalhada, livre de qualquer constrangimento e coerção, dos objetivos, da justificativa e dos procedimentos da mesma.

Fui especialmente informado:

- a) Da garantia de receber, a qualquer momento, resposta a toda pergunta ou esclarecimento de qualquer dúvida acerca da pesquisa e de seus procedimentos;
- b) Da liberdade de retirar meu consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem que isso traga qualquer prejuízo ao meu/minha filho/filha;
- c) Da garantia de que meu/minha filho/a não será identificado/a quando da divulgação dos resultados e que as informações obtidas serão utilizadas apenas para fins científicos vinculados à pesquisa;
- d) Os encontros serão gravados e fotografados, mas nenhum áudio ou imagem será divulgado, somente transcrito, mas sem identificação dos alunos;
- e) Do compromisso do pesquisador de proporcionar-me informações atualizadas obtidas durante o estudo, ainda que isto possa afetar a participação de meu/minha filho/a;
- f) De que esta investigação está sendo desenvolvida como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, estando a pesquisadora inserida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES RS.
- g) Da inexistência de custos.

A pesquisadora responsável pela pesquisa é a professora Joseane Marta Vian, orientada pela professora Marli Teresinha Quartieri da Universidade do Vale do Taquari - UNIVATES de Lajeado, RS, que podem ser contatadas pelos e-mails ou e ainda pelo telefone (51) 3714-7000 ramal 5517.

Local e data

Nome e assinatura do/a responsável

Nome e assinatura da pesquisadora responsável



UNIVATES

R. Avelino Talini, 171 | Bairro Universitário | Lajeado | RS | Brasil
CEP 95914.014 | Cx. Postal 155 | Fone: (51) 3714.7000
www.univates.br | 0800 7 07 08 09